Topological **M**ethods in **N**onlinear **A**nalysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 13, 1999, 301–311

ANALYSE ALGÉBRIQUE D'UN PROBLÈME DE DIRICHLET NON LINÉAIRE ET SINGULIER

J.-A. Marti — S. P. Nuiro

Abstract. La structure algébrique d'un anneau quotient et la structure topologique d'une algèbre semi-normée permettent de construire une classe d'algèbres de fonctions généralisées adaptée à la résolution d'un problème de Dirichlet non linéaire à données irrégulières.

The algebraic structure of a factor ring and the topological structure of a semi-normed algebra permit the construction of many algebras of generalized functions. Some of them are well suitable to solve a non linear Dirichlet problem with irregular data.

1. Introduction

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau d'algèbres sur un espace topologique X, les faisceaux de $(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathfrak{P}})$-algèbres [7] décrivent les deux structures fondamentales de la plupart des algèbres de fonctions généralisées. La première est la structure algébrique d'un anneau quotient $\mathcal{C}$ de nombres généralisés possédant une certaine propriété de stabilité. La seconde est, pour chaque ouvert Ω de X, la structure topologique de l'algèbre $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}(\Omega)}(\Omega) = E_{\mathcal{P}}$, semi-normée par la famille $\mathfrak{P}(\Omega) = \mathcal{P}$. On notera $\mathcal{A}_{\mathcal{C},E_{\mathcal{P}}}$ une telle $(\mathcal{C}, E_{\mathcal{P}})$-algèbre de fonctions généralisées. En particularisant $\mathcal{C}$ et $E_{\mathcal{P}}$ on retrouve les algèbres de Goursat [8] et les algèbres associées à une échelle asymptotique [4], ces deux types d'algèbres généralisant elles-mêmes les points de vue classiques [3], [5] recensés par exemple dans [9]. On retrouve aussi les constructions proposées dans [1]. Mais l'intérêt du concept des $(\mathcal{C}, E_{\mathcal{P}})$-algèbres est plutôt de pouvoir fournir un cadre bien adapté à poser et à résoudre une grande variété de problèmes différentiels.

Ainsi, suivant une idée développée dans [4], l'étude de l'extension d'une application de $E_{\mathcal{P}}$ dans $F_{\mathcal{Q}}$ en une application de $\mathcal{A}_{\mathcal{C},E_{\mathcal{P}}}$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{D},F_{\mathcal{Q}}}$ permet-elle de résoudre certains problèmes différentiels non linéaires à données irrégulières. C'est ce dernier point de vue qu'on va développer ici et appliquer à la résolution d'un problème de Dirichlet.

2. Les $(\mathcal{C}, E_{\mathcal{P}})$-algèbres de fonctions généralisées

2.1. Le contexte mathématique. On pose d'abord $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère un sous-anneau A de l'anneau $\mathbb{K}^{]0,1]}$, et on pose:

$$A^+ = \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in A,\ \forall\varepsilon : u_\varepsilon \in \mathbb{R}_+\},$$

On suppose maintenant que A est stable par majoration, c'est-à-dire que pour tout $(s_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathbb{K}^{]0,1]}$, la propriété:

$$\exists (r_\varepsilon)_\varepsilon \in A^+,\ \forall\varepsilon : |s_\varepsilon| \le r_\varepsilon$$

entraîne qu'on a aussi $(s_\varepsilon)_\varepsilon \in A$.

On se donne également un idéal I_A de A, stable par majoration lui aussi, et on note $\mathcal{C}$ l'anneau quotient A/I_A de nombres généralisés.

$E_{\mathcal{P}}$ est une algèbre topologique sur le corps $\mathbb{K}$ associée à la famille filtrante de semi-normes $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ vérifiant:

$$\forall i \in I,\quad \exists (j(i), k(i)) \in I^2,\quad \exists C \in \mathbb{R}_+^* : p_i(fg) \le C p_{j(i)}(f) p_{k(i)}(g).$$

On pose alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A(E_{\mathcal{P}}) &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in E^{]0,1]}\ \forall i \in I,\ (p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon \in A^+\},\\ \mathcal{J}_{I_A}(E_{\mathcal{P}}) &= \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in E^{]0,1]}\ \forall i \in I,\ (p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon \in I_A^+\}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que A^+ n'est pas un sous-anneau de A mais que l'addition et la multiplication y restent stables. Il en est de même pour I_A^+. En vue d'obtenir l'identification annoncée au (iii) de la proposition ci-dessous, on suppose enfin que l'ensemble

$$A^* = \{(|u_\varepsilon|)_\varepsilon \in \mathbb{R}^{]0,1]},\ (u_\varepsilon)_\varepsilon \in A\}$$

est un sous-ensemble de A^+ stable par addition et multiplication, et qu'il en est de même pour I_A^* relativement à I_A^+, avec des notations évidentes.

Proposition 1. *Sous les hypothèses ci-dessus on a:*

(i) $\mathcal{H}_A(E_{\mathcal{P}})$ *est une sous-algèbre de* $E^{]0,1]}$,

(ii) $\mathcal{J}_{I_A}(E_{\mathcal{P}})$ *est un idéal de* $\mathcal{H}_A(E_{\mathcal{P}})$,

(iii) *l'anneau quotient* $\mathcal{H}_A(\mathbb{K}_{|\cdot|})/\mathcal{J}_{I_A}(\mathbb{K}_{|\cdot|})$ *n'est autre que l'anneau quotient* $\mathcal{C} = A/I_A$.

Preuve. La démonstration de la stabilité de l'addition dans $\mathcal{H}_A(E_\mathcal{P})$ ou dans $\mathcal{J}_{I_A}(E_\mathcal{P})$ se fait sans difficulté grâce à la propriété de stabilité par majoration. Celle de la multiplication utilise en outre l'estimation concernant la semi-norme d'un produit. Pour la troisième propriété, il suffit de vérifier que l'anneau $\mathcal{H}_A(\mathbb{K}_{|\,\cdot\,|})$ (resp. l'idéal $\mathcal{J}_{I_A}(\mathbb{K}_{|\,\cdot\,|})$) s'identifie à A (resp. à I_A). $\square$

Définition 2. On appelle algèbre de fonctions généralisées de type $(\mathcal{C}, E_\mathcal{P})$ ou $(\mathcal{C}, E_\mathcal{P})$-algèbre toute algèbre quotient $\mathcal{A}_{\mathcal{C},E_P} = \mathcal{H}_A(E_\mathcal{P})/\mathcal{J}_{I_A}(E_\mathcal{P})$. Son anneau de constantes généralisées est l'anneau $\mathcal{H}_A(\mathbb{K}_{|\cdot|})/\mathcal{J}_{I_A}(\mathbb{K}_{|\cdot|})$ par définition, et s'identifie donc à $\mathcal{C} = A/I_A$.

2.2. Exemples. (a) Algèbres de Goursat. Utilisées dans la résolution du problème de Goursat non linéaire à données irrégulières [8], les algèbres de Goursat sont définies comme:

$$\mathcal{A}_G(\mathbb{R}^d) = \mathcal{A}_{\mathcal{C},E_P} \text{ avec } E = C^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ et } \mathcal{P} = (p_{K,\alpha})_{(K,\alpha)\in\mathcal{K}\times\mathbb{N}^d},$$

$\mathcal{K}$ étant l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^d$, avec, pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$p_{K,\alpha}(f) = \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|.$$

(b) Algèbres asymptotiques. Dans [4], A. Delcroix définit une échelle asymptotique a reliée à une algèbre dénombrablement semi-normée H, à partir de laquelle il construit une algèbre $\mathcal{X}_{M,a}(H)$ d'éléments à “croissance a-modérée” et un idéal $\mathcal{N}_a(H)$ d'éléments à “décroissance a-rapide”. Les algèbres asymptotiques sont alors définies comme:

$$\mathcal{G}_a(H) = \mathcal{A}_{\mathcal{C},H_P} \text{ avec } \mathcal{C} = \mathcal{X}_{M,a}(\mathbb{C})/\mathcal{N}_a(\mathbb{C})$$

(c) Algèbres de Sobolev. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = S^{m,p}(\Omega) = W^{m+1,p}(\Omega) \cap W^{m,\infty}(\Omega)$, avec $p \in [1;\infty]$, $m \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P} = (p_{m,p,\Omega})$, avec, pour $f \in E$,

$$p_{m,p,\Omega}(f) = \|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} + \|f\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}.$$

Les algèbres de Sobolev sont définies comme:

$$\mathcal{A}_S(\Omega) = \mathcal{H}_A(E_\mathcal{P})/\mathcal{J}_{I_A}(E_\mathcal{P})$$

où $\mathcal{C}$ est à choisir. Ces algèbres peuvent servir lors de la résolution de problèmes (non linéaires) pour lesquels on ne saurait pas montrer que la solution est une fonction indéfiniment dérivable lorsque les données le sont. C'est le cas du problème suivant où on cherche à résoudre:

$$\begin{cases} -\Delta G(u) + u^3 = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où G est une fonction dérivable croissante et injective.

2.3. Extension d'une application. Si Φ est une application de l'algèbre semi-normée $E_{\mathcal{P}}$ dans l'algèbre semi-normée $F_{\mathcal{Q}}$ où $P = (p_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{Q} = (q_j)_{j\in J}$ on peut chercher à étendre Φ en une application de $\mathcal{A}_{\mathcal{C},E_P}$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{D},F_P}$, avec $\mathcal{C} = A/I_A$ et $\mathcal{D} = B/I_B$ où B et I_B ont les mêmes propriétés respectives que A et I_A. Et on y réussit sous les hypothèses du résultat suivant:

Théorème 3. *On suppose:*

(i) $A \subset B$ *et* $I_A \subset I_B$.

(ii) *Pour tout* $j \in J$ *il existe un indice* $i(j) \in I$, *un entier* $m(j)$ *et un polynôme* $\Psi_{m(j)}$ *d'une variable, de degré* $m(j)$ *et à coefficients dans* $\mathbb{R}_+$ *tels que*

$$\forall x \in E,\ q_j(\Phi(x)) \leq \Psi_{m(j)}(p_{i(j)}(x)).$$

(iii) *Pour tout* $j \in J$ *il existe un couple d'indices* $(i(j), k(j)) \in I \times I$, *un couple d'entiers* $(m(j), l(j))$, *et deux polynômes d'une variable à coefficients dans* $\mathbb{R}_+$*:* $\Xi_{m(j)}$, *de degré* $m(j)$, *et* $\Theta_{l(j)}$, *de degré* $l(j)$ *avec* $\Theta_{l(j)}(0) = 0$, *tels que:*

$$\forall x, \xi \in E,\ q_j(\Phi(x+\xi) - \Phi(x)) \leq \Xi_{m(j)}(p_{i(j)}(x))\Theta_{l(j)}(p_{k(j)}(\xi)).$$

Alors, l'application Φ *de* $E_{\mathcal{P}}$ *dans* $F_{\mathcal{Q}}$ *s'étend en une application* $\widetilde{\Phi}$ *de* $\mathcal{A}_{\mathcal{C},E_{\mathcal{P}}}$ *dans* $\mathcal{A}_{\mathcal{D},F_{\mathcal{Q}}}$.

Preuve. Soit $U = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{A}_{\mathcal{C},E_{\mathcal{P}}}$. Nous définirons $\widetilde{\Phi}(U)$ comme la classe de $(\Phi(u_\varepsilon))_\varepsilon$. Il faut donc légitimer cette définition. D'abord, il faut montrer que si $(u_\varepsilon)_\varepsilon$est dans $\mathcal{H}_A(E_{\mathcal{P}})$, alors $(\Phi(u_\varepsilon))_\varepsilon$ est dans $\mathcal{H}_B(F_{\mathcal{Q}})$. Ceci résulte de ce que pour chaque $i \in I$, $(p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon$ est dans A^+ et il en est donc de même pour $(\Psi_{m(j)}(p_{i(j)}(u_\varepsilon)))_\varepsilon$. Donc la famille $(q_j(\Phi(u_\varepsilon)))_\varepsilon$, dont les éléments sont majorés pour tout ε par ceux d'une famille de A^+, est elle même dans A, et même dans A^+, donc dans B^+.

Ensuite, il faut montrer que si $(i_\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\mathcal{J}_{I_A}(E_{\mathcal{P}})$, alors, la famille $(\Phi(u_\varepsilon + i_\varepsilon) - \Phi(u_\varepsilon))_\varepsilon$ est dans $\mathcal{J}_{I_B}(F_{\mathcal{Q}})$. Là encore, comme pour chaque $(i,k) \in I \times I$, $(p_i(u_\varepsilon))_\varepsilon$ est dans A^+ (resp. $(p_k(i_\varepsilon))_\varepsilon$ est dans I_A^+), il en est de même pour $(\Xi_{m(j)}(p_{i(j)}(u_\varepsilon)))_\varepsilon$ (resp. pour $(\Theta_{l(j)}(p_{k(j)}(i_\varepsilon)))_\varepsilon$). Donc, la famille $(q_j(\Phi(u_\varepsilon + i_\varepsilon) - \Phi(u_\varepsilon)))_\varepsilon$, dont les éléments sont majorés par ceux d'une famille de I_A^+, est elle même dans I_A, et même dans I_A^+, donc finalement dans I_B^+. □

3. Application à la résolution d'un problème de Dirichlet non linéaire à données trés irrégulières

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta U + \theta(\,\cdot\,, U) = F & \text{dans } \Omega, \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où F et G sont des fonctions généralisées, qui peuvent être entre autres des (images de) distributions. On suppose que:

(H_1) Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$,

(H_2) θ est une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ à valeurs réelles,

(H_3) pour tout $x\in\Omega$, la fonction $t\mapsto\theta(x,t)$ est croissante et bijective,

(H_4) pour tout multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}$, il existe un entier $\zeta_\alpha\in\mathbb{N}$ et une fonction $\kappa_\alpha\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$\forall(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},\ |\partial^\alpha\theta(x,t)|\le\kappa_\alpha(x)(1+|t|)^{\zeta_\alpha}.$$

Exemple 4. Les hypothèses sur la fonction θ nous autorisent à choisir, par exemple, les fonctions:

$$\theta(x,t)=\gamma(x)t^3\quad\text{ou}\quad\theta(x,t)=\gamma(x)\frac{t^3}{1+t^2},$$

où $\gamma\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est positive.

Précisons le cadre fonctionnel choisi.

On considère A un sous anneau quelconque de l'anneau $\mathbb{R}^{]0,1]}$ et I_A un idéal de A, tous deux stables par majoration. On a donc défini $\mathcal{C}$ l'anneau quotient A/I_A de nombres généralisées. On considère aussi:

(1) $(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))_{\mathcal{Q}}$ l'algèbre topologique sur $\mathbb{R}$ associée à la famille de semi-normes $\mathcal{Q}=(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ avec

$$\forall w\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad q_m(w)=\|w\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})}=\sup_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\partial^\alpha w(x)|.$$

(2) $(\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega))_{\mathcal{R}}$ l'algèbre topologique sur $\mathbb{R}$ associée à la famille de semi-normes $\mathcal{R}=(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ avec

$$\forall w\in\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega),\quad r_m(w)=\|w\|_{\mathcal{C}^m(\partial\Omega)}=\sup_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\partial\Omega}|\partial^\alpha w(x)|.$$

On a donc ainsi défini les algèbres de fonctions généralisées $\mathcal{A}_{\mathcal{C},(\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))_{\mathcal{Q}}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{C},(\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega))_{\mathcal{R}}}$.

La recherche d'une solution dans une algèbre de fonctions généralisées, à l'aide du théorème d'extension (Théorème 3) nous conduit à commencer par l'étude d'une classe de problèmes réguliers.

3.1. Le problème de Dirichlet non linéaire dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 5. *Si les fonctions f et g vérifient $f\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $g\in\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ alors il existe une, et une seule, fonction u, élément de l'espace de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, telle que*

$$\begin{cases}-\Delta u+\theta(\,\cdot\,,u)=f & \textit{dans } \Omega,\\ u=g & \textit{sur } \partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

Preuve. La démonstration se fait en 4 étapes.

(A) Unicité de la solution dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. La méthode est classique; il suffit pour cela de considérer deux éventuelles solutions u_1 et u_2 de (1), qui vérifient donc de fait, pour le choix de la fonction-test $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx \\ &= -\int_\Omega (\theta(x, u_1) - \theta(x, u_2))(u_1 - u_2) \, dx \leq 0,\end{aligned}$$

puisque l'application $t \mapsto \theta(x, t)$ est croissante uniformément par rapport à $x \in \Omega$. Ainsi obtient-on l'unicité annoncée.

(B) Principe du maximum. On démontre que si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (1), alors:

$$m \leq u \leq M \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

où

$$m = \min(\inf_{\partial\Omega} g \, , \inf_{\Omega} \theta^{-1}(\,\cdot\,, f)) \quad \text{et } M = \max(\sup_{\partial\Omega} g, \sup_{\Omega} \theta^{-1}(\,\cdot\,, f)),$$

ce qui signifie que u est élément de l'espace de Sobolev $L^\infty(\Omega)$.

En effet, comme $(u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$, alors on dispose, via la formule de Green, de l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u . \nabla[(u - M)^+] dx + \int_\Omega (\theta(\,\cdot\,, u) - \theta(\,\cdot\,, M)\,)(u - M)^+ \, dx \\ &\qquad = \int_\Omega (f - \theta(\,\cdot\,, M))(u - M)^+ \, dx \leq 0.\end{aligned}$$

Puisque θ est croissante, alors

$$\int_\Omega (\theta(\,\cdot\,, u) - \theta(\,\cdot\,, M))(u - M)^+ \, dx \geq 0,$$

et donc

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla[(u - M)^+] \, dx = \int_\Omega |\nabla[(u - M)^+]|^2 \, dx \leq 0.$$

Il s'ensuit que

$$(u - M)^+ = 0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

d'où, on déduit que

$$u \leq M \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Par une méthode analogue, on démontre que

$$m \leq u \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

(C) Existence d'une solution dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. Ce résultat d'existence est obtenu à l'aide d'une méthode de point fixe utilisant la version du théorème de Schauder–Tychonoff relative à une application faiblement séquentiellement continue dans un espace de Banach réflexif et séparable ([6, p. 30], [10]).

On commence par considérer $w_0 \in H^1(\Omega)$, l'unique solution du problème de Dirichlet linéaire suivant:

$$\begin{cases} -\Delta w_0 = f & \text{dans } \Omega, \\ w_0 = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et la famille de problèmes de Dirichlet linéaires de formulations variationnelles suivantes:

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Pour } h \in H_0^1(\Omega), \text{ trouver } w_h \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w_h . \nabla v \, dx = - \int_\Omega \beta(x, w_0 + h) v \, dx, \end{cases}$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur Ω et pour $x \in \Omega$, la fonction $\beta(x, \cdot)$ est définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \beta(x,t) = \begin{cases} \theta(x,m) & \text{si } t \leq m, \\ \theta(x,t) & \text{si } t \in [m, M], \\ \theta(x,M) & \text{si } t \geq M, \end{cases}$$

avec m et M définies à l'étape (B).

L'existence et l'unicité des fonctions w_0 et w_h sont assurées par les théorèmes classiques sur les problèmes de Dirichlet linéaires [2]. De plus, pour le choix loisible de la fonction-test $v = w_h$ dans la formulation variationnelle précédente (2), on obtient l'inégalité d'énergie suivante:

$$\|w_h\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla w_h|^2 \, dx \leq \rho(\Omega) \sup_{(x,t) \in \overline{\Omega} \times [m,M]} |\beta(x,t)|^2 = R^2,$$

où $\rho(\Omega)$ est une constante positive dépendant seulement de Ω. Cette inégalité montre que l'application

$$\Pi : H_0^1(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega), \qquad h \rightsquigarrow w_h$$

laisse invariant la boule fermée $B(0, R)$ de centre 0 et de rayon R de l'espace de Hilbert séparable $H_0^1(\Omega)$. Pour conclure, il faut montrer que pour toute suite $\{h_n\}$ de $B(0,R)$ convergeant faiblement vers h, lorsque n tend vers ∞, la suite $\{\Pi(h_n)\}$ converge faiblement vers $\Pi(h)$. Considérons donc une suite $\{h_n\}$ de $B(0,R)$ convergeant faiblement vers h, lorsque n tend vers ∞. Puisque la suite $\{\Pi(h_n)\}$ est borné on peut en extraire une sous-suite, encore notée $\{\Pi(h_n)\}$, telle que:

$$\Pi(h_n) \rightharpoonup \chi \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Puisque l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on peut supposer, après une nouvelle extraction, que

$$\Pi(h_n) \to \chi \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort}, h_n \to h \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p. dans } \Omega.$$

Utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on vérifie aisément que

$$\beta(\,\cdot\,, w_0 + h_n) \to \beta(\,\cdot\,, w_0 + h) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Dès lors, passant à la limite, lorsque n tend vers ∞, dans l'équation (2) relative à h_n, on en déduit que $\chi = \Pi(h)$. D'après la propriété d'unicité, (toute) la suite $\{\Pi(h_n)\}$ converge faiblement vers $\Pi(h)$ dans $H^1_0(\Omega)$. D'où l'existence d'un point fixe de Π dans $B(0,R)$, c'est-à-dire d'une fonction w, élément de $H^1_0(\Omega)$, telle que $w = \Pi(w)$. On en déduit que $\overline{u} = w_0 + w$ élément de $H^1(\Omega)$, et même de $H^2(\Omega)$ d'après ([2] pp. 181–182), vérifie le système

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} + \beta(\,\cdot\,,\overline{u}) = f & \text{dans } \Omega,\\ \overline{u} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Par une démonstration analogue à celle faite pour le principe du maximum (étape (B)), on démontre que

$$m \le \overline{u} \le M \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

en remarquant que

$$\beta(\,\cdot\,, M) = \theta(\,\cdot\,, M) \quad \text{et } \beta(\,\cdot\,, m) = \theta(\,\cdot\,, m).$$

Aussi peut-on affirmer que

$$\beta(\,\cdot\,,\overline{u}) = \theta(\,\cdot\,,\overline{u}) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

donc que, $\overline{u}$ vérifie le système (1), et, par suite que, $\overline{u} = u$.

(D) Appartenance à l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ de la solution. Tout d'abord, on rappelle les définitions suivantes, pour $p \in [1,\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall w \in W^{m,p}(\Omega), \qquad \|w\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |\partial^\alpha w|^p\,dx,\\ \forall w \in W^{m,p}(\partial\Omega), \quad \|w\|^p_{W^{m,p}(\partial\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\partial\Omega} |\partial^\alpha w|^p\,d\sigma, \end{aligned}$$

où $d\sigma$ désigne la mesure superficielle sur $\partial\Omega$ induite par la mesure de Lebesgue. On peut affirmer (cf. [2], p. 197) que, pour tout entier naturel m,

$$\|u\|_{W^{m+2,d+1}(\Omega)} \le C(\Omega)\{\|f - \theta(\,\cdot\,,u)\|_{W^{m,d+1}(\Omega)} + \|g\|_{W^{m+2-1/(d+1),d+1}(\partial\Omega)}\},$$

sous reserve que $\theta(\,\cdot\,,u) \in W^{m,d+1}(\Omega)$, qui induit l'inégalité suivante

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega})} \le C(\Omega)\{\|f - \theta(\,\cdot\,,u)\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} + \|g\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\partial\Omega)}\}. \tag{3}$$

Cette dernière inégalité étant obtenue à l'aide des injections canoniques continues suivantes
$$\forall p \in [1, \infty[\,,\ \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}),$$
où k désigne la partie entière du nombre $(m - d/p)$ (cf. [2], p. 169).

Puique $\beta(\,\cdot\,, u) \in L^\infty(\overline{\Omega})$ et Ω borné, on peut affirmer (cf. [2], p. 197) que $u_h \in W^{2,d+1}(\Omega)$ indépendamment de h, donc que $u \in W^{2,d+1}(\Omega)$ et, par suite, que $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

D'autre part, comme $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ alors $\theta(\,\cdot\,, u) \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ dès lors que $u \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$.

Grâce à ces dernières remarques, l'inégalité (3) permet alors de montrer par récurrence que la fonction u est élément de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. □

3.2. Le problème de Dirichlet généralisé. Nous commençons par énoncer les deux lemmes suivants.

Lemme 6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple d'entiers naturels $(m(n), k(n))$ et un polynome $\Psi_{k(n)}$ de degré $k(n)$ à une variable, tels que*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega),\ q_n(u_{(f,g)}) \le \Psi_{k(n)}(\sup\{q_{m(n)}(f), r_{m(n)}(g)\}), \tag{4}$$

Preuve. Il suffit de reprendre l'inégalité (3) qui induit la suivante

$$\|u_{(f,g)}\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega})} \le C(\Omega)\{\|f\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} + \|\theta(\,\cdot\,, u_{(f,g)})\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} + \|g\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\partial\Omega)}\},$$

valable pour tout entier naturel m. Cette inégalité induit à son tour, par récurrence sur m jusqu'à $m{+}1 = n$, le résultat annoncé, l'hypothèse de récurrence étant la suivante
$$\|u_{(f,g)}\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} \text{ vérifie la propriété (4).}$$
En utilisant l'hypothèse (H_4) et l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $\|\theta(\,\cdot\,, u_{(f,g)})\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})}$ vérifie une propriété du type (4). En effet, pour tout ordre de dérivation $\nu \in \mathbb{N}^d$ de longueur inférieur ou égal à m, $\partial^\nu \theta(\,\cdot\,, u_{(f,g)})$ est une expression polynomiale de degré inférieur ou égal à m, en fonction des dérivées partielles de $u_{(f,g)}$ d'ordre inférieur ou égal à m. Les "coefficients" de cette expression polynomiale sont des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m de la fonction $(x,t) \rightsquigarrow \theta(x,t)$ évaluée en $(x, u_{(f,g)}(x))$. □

Lemme 7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un quadruplet d'entiers naturels $(m(n), h(n), k(n), l(n))$ et deux polynomes, à une variable, $\Xi_{h(n)}$ de degré $h(n)$ et $\Theta_{l(n)}$ de degré $l(n)$ verifiant $\Theta_{l(n)}(0) = 0$, tels que $\forall (f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$, $\forall (\varphi, \gamma) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$,*

$$\begin{aligned} &q_n(u_{(f+\varphi, g+\gamma)} - u_{(f,g)}) \\ &\qquad \le \ldots \le \Xi_{h(n)}(\sup\{q_{m(n)}(f), r_{m(n)}(g)\})\Theta_{l(n)}(\sup\{q_{k(n)}(\varphi), r_{k(n)}(\gamma)\}). \end{aligned}$$

Preuve. La fonction ψ, définie par

$$\psi = u_{(f+\varphi, g+\gamma)} - u_{(f,g)},$$

est, par différence, solution du problème

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} -\Delta\psi + \theta(\,\cdot\,, u_{(f,g)} + \psi) - \theta(\,\cdot\,, u_{(f,g)}) = \varphi & \text{dans } \Omega, \\ \psi = \gamma & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction θ, on obtient l'égalité suivante

$$\theta(x, u_{(f,g)}(x) + t) - \theta(x, u_{(f,g)}(x)) = \delta_u(x,t),$$

où

$$\delta_u(x,t) = t \int_0^1 \frac{\partial\theta}{\partial t}(x, u_{(f,g)}(x) + st)\, ds.$$

On voit que ψ est solution d'un problème de Dirichlet du type (1), avec δ_u jouant le role de θ. On peut alors affirmer, comme pour (3), que, pour tout entier naturel m

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega})} \le C(\Omega)\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{m}(\overline{\Omega})} + \|\gamma\|_{\mathcal{C}^{m+1}(\partial\Omega)} + \|\delta_u(\,\cdot\,,\psi)\|_{\mathcal{C}^{m}(\overline{\Omega})}\}.$$

En utilisant une méthode analogue à celle de la démonstration précédente, on obtient le résultat annoncé. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence et d'unicité suivant

Théorème 8. *Si les fonctions F et G vérifient*

$$F \in \mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})_{\mathcal{P}}} \quad \textit{et } G \in \mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)_{\mathcal{Q}}}$$

alors il existe une, et une seule, fonction généralisée $U = \mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon$, élément de l'espace de $\mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})_{\mathcal{P}}}$, telle que

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} -\Delta U + \theta(\,\cdot\,, U) = \mathrm{cl}(-\Delta u_\varepsilon + \theta(\,\cdot\,, u_\varepsilon))_\varepsilon = F & \textit{dans } \mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})_{\mathcal{P}}}, \\ \cdot\, U|_{\partial\Omega} = \mathrm{cl}(\,.\, u_\varepsilon|_{\partial\Omega})_\varepsilon = G & \textit{dans } \mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)_{\mathcal{Q}}} \end{cases}$$

Preuve. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))_{\mathcal{Q}} \times (\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega))_{\mathcal{R}} &\mapsto (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))_{\mathcal{Q}} \\ (f,g) &\rightsquigarrow u_{(f,g)} \end{aligned}$$

où $u_{f,g}$ désigne la solution du problème (1). Pour obtenir le résultat annoncé, il suffit de se référer aux Lemmes 6 et 7. Pour conclure, on applique le Théorème 3, en remarquant que si

$$(F,G) = \mathrm{cl}(f_\varepsilon, g_\varepsilon)_\varepsilon \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))_{\mathcal{Q}} \times (\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega))_{\mathcal{R}},$$

alors, en posant $u_\varepsilon = \Phi(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$, la fonction généralisée $\mathrm{cl}(u_\varepsilon)_\varepsilon = U$ vérifie (6). $\square$

Remarque 9. Soulignons la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet avec des données très irrégulières, comme des puissances des images dans $\mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})_\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)_\mathcal{Q}}$ de mesures de Dirac en des points de Ω ou de $\partial\Omega$.

References

[1] A. B. Antonevich and Y. Radyno, *On a general method for constructing algebras of generalized functions*, Soviet Math. Dokl. **43** (1991).

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle — Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1993.

[3] J.-F. Colombeau, *Multiplication of distributions*, Lectures Notes in Math., vol. 1532, Springer-Verlag, 1992.

[4] A. Delcroix and D. Scarpalezos, *Asymptotic scales-asymptotic algebras*, Integral Transform. Spec. Funct. **1-4** (1998), 157–166.

[5] Y. V. Egorov, *A contribution to the theory of generalized functions*, Russian Math. Surveys **45** (1990), 1–49.

[6] G. Gagneux and M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, Mathématiques and Applications **22**, Springer.

[7] J.-A. Marti, *Fundamental structures and asymptotic microlocalization in sheaves of generalized functions*, Integral Transform. Spec. Funct. **6** (1998), 223–228.

[8] J.-A. Marti, S. P. Nuiro and V. S. Valmorin, *Algèbres différentielles et problème de Goursat non linéaire à données irrégulières*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **VII** (1998), no. 1, 135–159.

[9] M. Oberguggenberger, *Nonlinear theories of generalized functions*, Proceedings of the international conference on Applications of Nonstandard Analysis, Functional Analysis and Probability Theory, Blaubeuren, 1992.

[10] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, tome I, Fixed-points Theorie, New-York, 1986.

Manuscript received March 3, 1999

J.-A. Marti et S. P. Nuiro
Département de Mathématiques
Université des Antilles et de la Guyane
Campus de Fouillole, Pointe à Pitre Cedex,
97159 Guadeloupe F.W.I.

E-mail address: Jean-Andre.Marti@univ-ag.fr, Paul.Nuiro@univ-ag.fr