Topological **M**ethods in **N**onlinear **A**nalysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 5, 1995, 365–383

PROBLÈMES PÉRIODIQUES DU SECOND ORDRE À CROISSANCE AU PLUS LINÉAIRE

Noha El Khattabi

Dedicated to Ky Fan on the occasion of his 80th birthday

1. Introduction

Nous nous proposons dans ce papier d'établir des résultats d'existence de solutions du problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory vérifiant une condition de croissance au plus linéaire. Plus précisément, nous supposerons que pour tout $M > 0$, il existe $p \in L^2$ et $q \in L^1$ tels que

$$|f(t,x,y)| \leq p(t)|y| + q(t), \qquad \text{p.p. } t, \ \forall x \text{ tel que } |x| \leq M.$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés au cas où la non linéarité est à croissance du type Bernstein ou Bernstein–Nagumo; nous citerons à ce sujet [2, 8–10, 14–20]. Si nous examinons par exemple l'équation de Liénard généralisée, c'est-à-dire, lorsque la partie non linéaire f est de la forme $f(t,x,y) = e(t) - h(t,x)y - g(t,x)$, g et h étant des fonctions de Carathéodory et e une fonction intégrable, nous constatons que la fonction f ne satisfait pas la condition de croissance de Bernstein–Nagumo, mais vérifie néanmoins une condition de croissance au plus linéaire.

Après avoir présenté les notations et les résultats utilisés tout au long de ce texte, nous commençons par établir un principe général d'existence (théorème 3.1) que nous appliquons par la suite à des systèmes de Liénard. Nous obtenons ainsi des résultats qui généralisent ceux de J. Mawhin [18] et M. Martelli [17].

Dans le cas scalaire, en supposant que $(\mathcal{P})$ possède une sur-solution α et une sous-solution β, nous démontrons au théorème 3.2 l'existence d'une solution x telle que $\beta(t) \leq x(t) \leq \alpha(t)$ pour tout t dans $[0,1]$. Après avoir introduit une notion de sur- et sous-solution stricte généralisée, nous démontrons, moyennant une hypothèse supplémentaire sur f et en utilisant le degré de Leray–Schauder classique, l'existence d'une solution x vérifiant $\beta(t) < x(t) < \alpha(t)$ pour tout t dans $[0,1]$; ce qui nous permet d'établir ensuite certains résultats de multiplicité du type Ambrosetti–Prodi [1] concernant des problèmes du type Liénard qui se ramènent dans le cas continu à ceux de C. Fabry, J. Mawhin et M. N. Nkashama [7].

Nos preuves sont essentiellement basées sur le théorème de transversalité topologique et l'alternative non linéaire de A. Granas.

2. Préliminaires

Soient $I = [0,1]$ et n un entier positif. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est notée $|\cdot|$. L'ensemble $C = C(I, \mathbb{R}^n)$ dénote l'espace des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme uniforme $|\cdot|_0$. L'espace $C^1 = C^1(I, \mathbb{R}^n)$ des fonctions continûment différentiables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $|x|_1 = \max\{|x|_0, |x'|_0\}$.

Soient $C_0 = \{x \in C : x(0) = 0\}$ et $C^1_{\mathrm{p}} = \{x \in C^1 : x(0) = x(1),\ x'(0) = x'(1)\}$; munis de leur topologie induite respective, ces deux sous-espaces sont des espaces de Banach.

Pour $p \geq 1$, l'espace $L^p = L^p(I, \mathbb{R}^n)$ est muni de la norme usuelle $\|x\|_p = (\int_0^1 |x(t)|^p \, dx)^{1/p}$ si $p < \infty$, et $\|x\|_\infty = \inf\{a \in \mathbb{R} : |x(t)| \leq a,\ \text{p.p. } t \in I\}$.

Si X est une partie de L^1, nous adopterons la notation

$$\widetilde{X} = \left\{ x \in X : \int_0^1 x(t)\, dt = 0 \right\}.$$

Tout $x \in L^1$ se décompose de la manière suivante :

$$x = \overline{x} + \widetilde{x}, \quad \text{où} \quad \overline{x} = \int_0^1 x(t)\, dt \quad \text{et} \quad \widetilde{x} \in \widetilde{L}^1.$$

Nous noterons $K(n)$ l'ensemble des parties compactes convexes non vides de $\mathbb{R}^n$. Si $P \in K(n)$, alors $|P| = \sup\{|a| : a \in P\}$.

Enfin, μ désignera la mesure de Lebesgue.

Soient E un espace vectoriel normé, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $\partial\mathcal{U}$ la frontière de $\mathcal{U}$. $\mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, E)$ (resp. $\mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^E)$) dénote l'ensemble des applications continues compactes de $\overline{\mathcal{U}}$ dans E, sans point fixe sur $\partial\mathcal{U}$ (resp. l'ensemble des applications multivoques compactes et semi-continues supérieurement (s.c.s.) de $\overline{\mathcal{U}}$ dans E, à valeurs compactes, convexes, non vides et sans point fixe sur $\partial\mathcal{U}$). Pour $F \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, E)$ (resp. $\mathcal{F} \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^E)$), $d(I - F,\mathcal{U})$ (resp. $d(I - \mathcal{F},\mathcal{U})$) dénotera le degré classique de Leray–Schauder de $I-F$ (resp. $I-\mathcal{F}$) par rapport à l'ouvert $\mathcal{U}$. Le lecteur pourra consulter [3, 11] pour la définition et les propriétés essentielles du degré topologique.

Définition 2.1. Une application $F \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, E)$ (resp. $\mathcal{F} \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^E)$) est dite *essentielle* si toute application $G \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, E)$ (resp. $\mathcal{G} \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^E)$) telle que $F|_{\partial\mathcal{U}} = G|_{\partial\mathcal{U}}$ (resp. $\mathcal{F}|_{\partial\mathcal{U}} = \mathcal{G}|_{\partial\mathcal{U}}$) admet au moins un point fixe.

Théorème 2.1 (Transversalité topologique). *Soient F et G (resp. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$) homotopes dans $\mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, E)$ (resp. $\mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, 2^E)$). Alors F (resp. $\mathcal{F}$) est essentielle si et seulement si G (resp. $\mathcal{G}$) est essentielle.*

Théorème 2.2 (Alternative non linéaire). *Soient $F : \overline{\mathcal{U}} \to E$ (resp. $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{U}} \to 2^E$) une application compacte, et $p \in \mathcal{U}$. Alors, une des deux propriétés suivantes est satisfaite :*

(a) *F (resp. $\mathcal{F}$) admet un point fixe dans $\overline{\mathcal{U}}$.*
(b) *Il existe $u \in \partial\mathcal{U}$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que $u = \lambda F u + (1 - \lambda)p$ (resp. $u \in \lambda\mathcal{F}u + (1 - \lambda)p$).*

Pour les démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.2 et pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [4, 13].

Théorème 2.3 (Théorème de Banach). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue. Si $A \subset \{t \in [a, b] : f'(t) \neq 0\}$, et $\mu(f(A)) = 0$, alors $\mu(A) = 0$.*

Proposition 2.4 (Inégalité de Wirtinger). *Soit $x \in C_{\mathrm{p}}$ une fonction absolument continue telle que $x' \in L^2$ et $\overline{x} = 0$. Alors $\|x\|_2 \leq \frac{1}{2\pi}\|x'\|_2$.*

Proposition 2.5 (Inégalité de Sobolev). *Si $x \in C^1_{\mathrm{p}}$ est tel que $\overline{x} = 0$, alors $|x|_0 \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\|x'\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}|x'|_0$.*

Proposition 2.6. *Soit $x \in C$ une fonction absolument continue. Si pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$ il existe $t_j \in I$ tel que $x_j(t_j) = 0$, alors $|x|_0 \leq n\|x'\|_1$.*

On pourra trouver une preuve du théorème 2.3 dans [16]. Pour les propositions 2.4 et 2.5, voir [21, p. 46], et pour la proposition 2.6 voir [6].

Définition 2.2. Soient k et m des entiers positifs. Une fonction $f : I \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^m$ (resp. une fonction multivoque $\Phi : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(m)$) est dite L^p-*Carathéodory* si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) pour chaque $z \in \mathbb{R}^{kn}$, la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est mesurable (resp. pour chaque $z \in \mathbb{R}^{kn}$, la fonction $t \mapsto \Phi(t,z)$ est mesurable);

(ii) pour presque tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto f(t,z)$ est continue (resp. pour presque tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto \Phi(t,z)$ est s.c.s.);

(iii) pour tout $R > 0$, il existe $h_R \in L^p$ telle que si $|z| \leq R$ alors $|f(t,z)| \leq h_R(t)$ pour presque tout $t \in I$ (resp. pour tout $R > 0$, il existe $h_R \in L^p$ telle que si $|z| \leq R$ alors $|\Phi(t,z)| \leq h_R(t)$, p.p. $t \in I$).

Nous dirons que f (resp. Φ) est *de Carathéodory* si elle est L^1-Carathéodory.

Définition 2.3. Chaque fonction $f : I \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ (resp. $\Phi : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(n)$) L^p-Carathéodory induit *l'opérateur de Carathéodory associé à* f (resp. *l'opérateur multivoque de Carathéodory associé à* Φ), $N_f : C^{k-1} \to C_0$ (resp. $N_\Phi : C^{k-1} \to 2^{C_0}$), défini par

$$N_f x(t) = \int_0^t f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(k-1)}(s))\, ds$$

(resp. $N_\Phi x = \{t \mapsto \int_0^t \phi(s)\, ds : \phi : I \to \mathbb{R}^n$ est une sélection intégrable de $\Phi(\cdot, x(\cdot))\}$).

Une propriété importante des opérateurs de Carathéodory est donnée par

Proposition 2.7. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$ une fonction L^p-Carathéodory et N_f l'opérateur de Carathéodory associé à f. Alors N_f est continu et complètement continu.*

Proposition 2.8. *Si $\Phi : I \times \mathbb{R}^{kn} \to K(n)$ est une fonction L^p-Carathéodory, alors l'opérateur N_Φ est à valeurs convexes, compactes et non vides, s.c.s. et complètement continu.*

Pour les preuves de ces résultats et pour plus de détails voir [15, 16].

3. Théorèmes d'existence

Dans cette section, nous présentons les résultats principaux de notre article.

3.1. Un principe général d'existence. Soit n_0 un entier inférieur ou égal à n. Nous définissons l'application $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$[\eta(x)]_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j = 1, \ldots, n_0, \\ -x_j & \text{si } j = n_0 + 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$ fixé, nous considérons la famille de problèmes suivants :

$$(\mathcal{P}_\lambda^\varepsilon) \qquad \begin{cases} x''(t) + \varepsilon\eta(x(t)) = \lambda[f(t, x(t), x'(t)) + \varepsilon\eta(x(t))], & \text{p.p. } t \in I, \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

où $\lambda \in [0, 1]$ et $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory.

Théorème 3.1. *Supposons que :*

(H$_1$) *Il existe une constante $M > 0$ et deux fonctions positives $p \in L^2$ et $q \in L^1$ (pouvant dépendre de M) telles que :*

$$|f(t, x, y)| \le p(t)|y| + q(t), \qquad \textit{p.p. } t \in I, \ \forall x \textit{ tel que } |x| \le M.$$

Supposons en outre que toute solution éventuelle x de $(\mathcal{P}_\lambda^\varepsilon)$ vérifie $|x|_0 \le M$. Alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

Démonstration. Si x est une solution de $(\mathcal{P}_\lambda^\varepsilon)$, alors

$$x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)) - (1 - \lambda)\varepsilon\eta(x(t)), \tag{3.1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -\int_0^1 x''(t)x(t)\,dt = \|x'\|_2^2 &\le \int_0^1 |f(t, x(t), x'(t)) \cdot x(t)|\,dt + |\varepsilon| \cdot \|x\|_2^2 \\ &\le M(\|p\|_2\|x'\|_2 + \|q\|_1) + |\varepsilon|M^2, \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une constante c telle que

$$\|x'\|_2 \le c. \tag{3.2}$$

De l'hypothèse (H$_1$) et des relations (3.1) et (3.2) il découle que

$$\|x''\|_1 \le c\|p\|_2 + \|q\|_1 + |\varepsilon|M.$$

Comme $\int_0^1 x'(t)\,dt = 0$, pour chaque $j = 1, \dots, n$ il existe $t_j \in I$ tel que $x_j'(t_j) = 0$. D'où, par la proposition 2.6, $|x'|_0 \le n\|x''\|_1$. Nous obtenons ainsi l'existence d'une constante M', indépendante de λ, telle que

$$|x'|_0 \le M'.$$

Soient $L_\varepsilon : C_{\mathrm{p}}^1 \to C_0$ et $N_\varepsilon : C_{\mathrm{p}}^1 \to C_0$ les opérateurs définis par

$$\begin{aligned} L_\varepsilon x(t) &= x'(t) - x'(0) + \varepsilon \int_0^t \eta(x(s))\,ds, \\ N_\varepsilon x(t) &= \int_0^t [f(s, x(s), x'(s)) + \varepsilon\eta(x(s))]\,ds. \end{aligned}$$

L'opérateur L_ε est un opérateur linéaire inversible, et il découle de la proposition 2.7 que N_ε est un opérateur continu et complètement continu.

Le problème $(\mathcal{P}_\lambda^\varepsilon)$ est alors équivalent au problème de point fixe

$$x = \lambda L_\varepsilon^{-1} N_\varepsilon x, \qquad x \in C_{\mathrm{p}}^1,$$

et pour $\lambda = 1$ on retrouve le problème $(\mathcal{P})$.

Soit $R > \max\{M, M'\}$ et $\mathcal{U}$ l'ouvert défini par $\mathcal{U} = \{x \in C_{\mathrm{p}}^1 : |x|_1 < R\}$; alors $(\mathcal{P}_\lambda^\varepsilon)$ n'a pas de point fixe sur la frontière de $\mathcal{U}$, et en appliquant le théorème 2.2 nous obtenons l'existence d'une solution de $(\mathcal{P})$. $\square$

Remarque. Soient $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{H} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n$ une fonction L^2-Carathéodory et $g : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory. Une fonction f de la forme

$$f(t, x, y) = g(t, x) - \mathcal{H}(t, x)y$$

vérifie l'hypothèse (H_1).

3.2. Méthode des sur- et sous-solutions. Dans toute cette section, la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Définition 3.1. Soient α et β deux fonctions dans C^1 dont les dérivées sont absolument continues et telles que $\alpha(t) \le \beta(t)$ pour tout $t \in I$. Nous rappelons que α est *sous-solution* de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha''(t) \ge f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ \alpha(0) = \alpha(1), \quad \alpha'(0) \ge \alpha'(1), \end{cases}$$

et β est *sur-solution* si

$$\begin{cases} \beta''(t) \le f(t, \beta(t), \beta'(t)), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ \beta(0) = \beta(1), \quad \beta'(0) \le \beta'(1). \end{cases}$$

Nous dirons que α est une *sous-solution stricte* si elle vérifie de plus :

$$\inf_t \operatorname{ess}[\alpha''(t) - f(t, \alpha(t), \alpha'(t))] > 0.$$

De même, β est une *sur-solution stricte* si

$$\inf_t \operatorname{ess}[f(t, \beta(t), \beta'(t)) - \beta''(t)] > 0.$$

Avant d'énoncer notre théorème d'existence nous allons introduire quelques notations. Soient α une sous-solution et β une sur-solution de $(\mathcal{P})$. Nous désignerons par $(\mathcal{P}_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ la famille de problèmes multivoques

$$(\mathcal{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} x''(t) - x(t) \in \Phi_\lambda(t, x(t), x'(t)), & \text{p.p. } t \in [0,1], \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

où $\Phi_\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ est défini par

$$\Phi_\lambda(t,x,y) = \begin{cases} \max\{\beta''(t) - \beta(t), \lambda f(t,x,y) - \lambda x\} & \text{si } x > \beta(t), \\ I(f,\lambda,\beta) & \text{si } x = \beta(t), \\ \lambda f(t,x,y) - \lambda x & \text{si } \alpha(t) < x < \beta(t), \\ J(f,\lambda,\alpha) & \text{si } x = \alpha(t), \\ \min\{\alpha''(t) - \alpha(t), \lambda f(t,x,y) - \lambda x\} & \text{si } x < \alpha(t), \end{cases}$$

avec

$$I(f,\lambda,\beta) = [\lambda(f(t,x,y) - x), \max\{\beta''(t) - \beta(t), \lambda(f(t,x,y) - x)\}]$$

et

$$J(f,\lambda,\alpha) = [\min\{\alpha''(t) - \alpha(t), \lambda(f(t,x,y) - x)\}, \lambda(f(t,x,y) - x)].$$

Soient $L : C^1_{\mathrm{p}} \to C_0$, $N_f : C^1_{\mathrm{p}} \to C_0$ et $N_{\Phi_\lambda} : C^1_{\mathrm{p}} \to 2^{C_0}$ les opérateurs définis par

$$Lx(t) = x'(t) - x'(0) - \int_0^t x(s)\,ds,$$
$$N_f x(t) = \int_0^t [f(s,x(s),x'(s)) - x(s)]\,ds,$$
$$N_{\Phi_\lambda} x = \left\{ t \mapsto \int_0^t \phi(s)\,ds : \phi : I \to \mathbb{R} \text{ est une sélection mesurable de } \Phi_\lambda \right\}.$$

L'opérateur L est linéaire, continu et bijectif, et N_f est continu et complètement continu (proposition 2.7). D'autre part, Φ_λ étant une fonction de Carathéodory, N_{Φ_λ} est à valeurs convexes, compactes non vides, s.c.s. et complètement continu (proposition 2.8). Si $F = L^{-1}N_f$ et $\mathcal{F}_\lambda = L^{-1}N_{\Phi_\lambda}$, alors $F : C^1_{\mathrm{p}} \to C^1_{\mathrm{p}}$ est complètement continu et $\mathcal{F}_\lambda : C^1_{\mathrm{p}} \to 2^{C^1_{\mathrm{p}}}$ est à valeurs convexes, compactes non vides, s.c.s. et complètement continu. Le problème $(\mathcal{P})$ est alors équivalent au problème de point fixe suivant :

$$Fx = x, \qquad x \in C^1_{\mathrm{p}},$$

et $(\mathcal{P}_\lambda)$ est équivalent au problème de point fixe

$$x \in \mathcal{F}_\lambda x, \qquad x \in C^1_{\mathrm{p}}.$$

Théorème 3.2. *Supposons que le problème $(\mathcal{P})$ possède une sous-solution α et une sur-solution β, et que f vérifie l'hypothèse :*

(H$_2$) *Il existe $p \in L^\infty$ (ou bien $p \in L^2$ avec $\|p\|_2 < 1$) et $q \in L^1$ tels que*

$$|f(t,x,y)| \le p(t)|y| + q(t), \qquad p.p.\ t \in I,\ \forall x \text{ tel que } \alpha(t) \le x \le \beta(t).$$

Alors $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution x telle que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$.

Démonstration. Soient x une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$, et t_0 le point où la fonction $u = x - \beta$ atteint son maximum. Supposons que $t_0 \in (0,1)$. Alors $u'(t_0) = 0$ et il existe un voisinage V' de t_0 tel que $u''(t) \leq 0$ pour presque tout $t \in V'$. Si $u(t_0) > 0$, alors il existe un voisinage V'' de t_0 tel que $u(t) > 0$ quel que soit $t \in V''$. Or, par définition de Φ_1 nous aurions $u''(t) \geq u(t) > 0$ presque partout sur $V = V' \cap V''$, ce qui est contradictoire. Si u atteint son maximum en 0 et si $u(0) > 0$, en raisonnant comme précédemment, tenant compte de la périodicité, nous obtenons une contradiction. Nous avons donc montré que toute solution x de $(\mathcal{P}_\lambda)$ vérifie $x(t) \leq \beta(t)$ quel que soit $t \in I$. De la même manière on montrerait que $x(t) \geq \alpha(t)$ quel que soit $t \in I$.

D'autre part, toute solution de $(\mathcal{P}_1)$ est une solution de $(\mathcal{P})$. En effet, soit x une solution de $(\mathcal{P}_1)$. Alors nous savons que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in I$. Soit $B = \{t \in I : x(t) = \beta(t)\}$. Alors on a, par application du théorème de Banach, $x'(t) = \beta'(t)$ pour tout $t \in B$ et $x''(t) = \beta''(t)$ pour presque tout $t \in B$. Par définition de Φ_1 on a

$$f(t,x(t),x'(t)) - x(t) \leq x''(t) - x(t) \leq \max\{\beta''(t) - \beta(t), f(t,x(t),x'(t)) - x(t)\}$$

presque partout sur B, et comme β est une sur-solution, nous avons : $x''(t) = f(t,x(t),x'(t))$ presque partout sur B. Par un raisonnement analogue sur l'ensemble $A = \{t \in I : x(t) = \alpha(t)\}$, nous obtenons finalement $x''(t) = f(t,x(t),x'(t))$ pour presque tout $t \in I$ et x est donc solution de $(\mathcal{P})$.

Montrons maintenant qu'il existe une constante M' telle que toute solution x de $(\mathcal{P}_\lambda)$ vérifie $|x'|_0 \leq M'$. Soit x une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$. Alors, d'après ce qui précède, on a $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ quel que soit $t \in I$. Si nous considérons les ensembles A et B définis plus haut, nous obtenons, par définition de Φ_λ et en utilisant le fait que α et β sont sous- et sur-solutions,

$$\lambda f(t,x(t),x'(t)) + (1-\lambda)x(t) \leq x''(t) \leq f(t,x(t),x'(t)), \qquad \text{p.p. } t \in B,$$

et

$$f(t,x(t),x'(t)) \leq x''(t) \leq \lambda f(t,x(t),x'(t)) + (1-\lambda)x(t), \qquad \text{p.p. } t \in A.$$

D'où finalement,

$$|x''(t)| \leq \max\{|\lambda f(t,x(t),x'(t)) + (1-\lambda)x(t)|, |f(t,x(t),x'(t))|\}, \qquad \text{p.p. } t \in I,$$

et de l'hypothèse (H_2) il découle que

$$|x''(t)| \leq p(t)|x'(t)| + q(t) + |x(t)|, \qquad \text{p.p. } t \in I. \tag{3.3}$$

Soit b le point où $|x'|$ atteint son maximum. Si $x'(b) = 0$, alors $x' \equiv 0$; sinon, soit $a = \sup\{t \in I : x'(t) = 0,\ x' \text{ ne change pas de signe sur } [t,b]\}$. Sans perte de généralité on peut supposer que $x'(b) > 0$ et que $a < b$. Si nous posons $M = \max\{|\alpha|_0, |\beta|_0\}$, il découle de (3.3) que

$$x''(t) \le |p(t)|x'(t) + |q(t)| + M, \qquad \text{p.p. } t \in (a,b),$$

et en intégrant cette relation entre a et b, nous obtenons

$$x'(b) \le 2|p|_\infty M + \|q\|_1 + M \qquad \text{si } p \in L^\infty$$

ou

$$x'(b) \le \|p\|_2\, x'(b) + \|q\|_1 + M \qquad \text{si } p \in L^2 \text{ avec } \|p\|_2 < 1.$$

D'où, dans les deux cas, l'existence d'une constante M' telle que $|x'|_0 \le M'$.

Nous considérons maintenant la famille de problèmes

$$(\mathcal{P}^\tau) \qquad \begin{cases} x''(t) - x(t) \in \Psi_\tau(t, x(t), x'(t)), & \text{p.p. } t \in [0,1],\\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

où $\Psi_\tau : I \times \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}}$ est définie par

$$\Psi_\tau(t,x,y) = \begin{cases} \tau \max\{\beta''(t) - \beta(t), 0\} & \text{si } x > \tau\beta(t),\\ \tau[0, \max\{\beta''(t) - \beta(t), 0\}] & \text{si } x = \tau\beta,\\ 0 & \text{si } \tau\alpha(t) < x < \tau\beta(t),\\ \tau[\min\{\alpha''(t) - \alpha(t), 0\}, 0] & \text{si } x = \tau\alpha,\\ \tau \min\{\alpha''(t) - \alpha(t), 0\} & \text{si } x < \tau\alpha(t). \end{cases}$$

Remarquons que si x est solution de $(\mathcal{P}_2^\tau)$ et si $0 < \tau \le 1$, alors x/τ est solution de $(\mathcal{P}_0)$ et nous avons donc $|x|_0 \le \tau M$ et $|x'|_0 \le \tau M'$.

Soit $N_{\Psi_\tau} : C^1_{\mathrm{p}} \to 2^{C_0}$ l'opérateur défini par

$$N_{\Psi_\tau} x = \left\{ t \mapsto \int_0^t \psi(s)ds : \psi : I \to \mathbb{R} \text{ est une sélection mesurable de } \Psi_\tau \right\}$$

et soit $\mathcal{G}_\tau = L^{-1} N_{\Psi_\tau}$; alors $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_0 = 0$.

Pour conclure, il découle des étapes précédentes qu'il suffit de montrer que $\mathcal{F}_1$ admet un point fixe. Soient $R > \max\{M, M'\}$ et

$$U = \{x \in C^1_{\mathrm{p}} : |x|_1 \le R\}.$$

Alors $\mathcal{F}_\lambda$, de même que $\mathcal{G}_\tau$, sont sans point fixe sur la frontière de U, pour tout λ et τ dans $[0,1]$. On en déduit que l'opérateur $\mathcal{F}_1$ est homotope à $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_1$, qui lui-même est homotope à la fonction constante nulle. Il découle du théorème 2.1 que $\mathcal{F}_1$ est essentielle et admet donc un point fixe. $\square$

Supposons maintenant que α et β sont respectivement sous-solution stricte et sur-solution stricte du problème $(\mathcal{P})$ et que la fonction f vérifie (H_2). Soient $M = \max\{|\alpha|_0, |\beta|_0\}$ et $\mathcal{U}$ l'ouvert défini par

$$\mathcal{U} = \{x \in C^1_{\mathrm{p}} : \alpha(t) < x(t) < \beta(t),\ \forall t \in I,\ |x'|_0 < M'\}$$

avec $M' > (2|p|_\infty + 1)M + \|q\|_1$ si $p \in L^\infty$, et $M' > (\|q\|_1 + M)/(1 - \|p\|_2)$ si $p \in L^2$.

Lemme 3.3. *Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, si nous supposons de plus que f vérifie :*

(H_3) *Pour tout $R > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, R) > 0$ tel que*

$$|(x,y) - (x_1,y_1)| \le \delta \Rightarrow |f_R(t,x,y) - f_R(t,x_1,y_1)| \le \varepsilon,\ \text{p.p. } t \in I,$$

où f_R est la restriction de f à $I \times \overline{B}(0,R)$, alors $d(I - F, \mathcal{U})$ est bien défini et $d(I - F, \mathcal{U}) = \pm 1$.

Démonstration. Pour montrer que $d(I - F, \mathcal{U})$ est bien défini, il suffit de vérifier que $F \in \mathcal{K}_{\partial\mathcal{U}}(\overline{\mathcal{U}}, C^1_{\mathrm{p}})$. Comme N_f est complètement continu, l'opérateur $F : \overline{\mathcal{U}} \to C^1_{\mathrm{p}}$ est compact. Il reste à démontrer que F n'a pas de point fixe sur $\partial\mathcal{U}$. Soit x un point fixe de F tel que $\alpha(t) \le x(t) \le \beta(t)$ pour presque tout $t \in I$. Considérons les ensembles $A = \{t \in I : x(t) = \alpha(t)\}$ et $B = \{t \in I : x(t) = \beta(t)\}$. Nous allons d'abord démontrer que $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Si $\mu(B) \ne 0$, par le théorème de Banach, les ensembles $\{t \in [0,1] : x(t) = \beta(t),\ x'(t) \ne \beta'(t)\}$ et $\{t \in [0,1] : x(t) = \beta(t),\ x'(t) = \beta'(t),\ x''(t) \ne \beta''(t)\}$ seraient de mesure nulle et par conséquent

$$\beta''(t) = x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) = f(t, \beta(t), \beta'(t)), \qquad \text{p.p. } t \in B;$$

ce qui est contradictoire car β est sur-solution stricte. De la même manière on montre que $\mu(A) = 0$. Posons

$$\begin{aligned} a &= \inf_t \mathrm{ess}\{\alpha''(t) - f(t, \alpha(t), \alpha'(t))\} > 0, \\ b &= \inf_t \mathrm{ess}\{f(t, \beta(t), \beta'(t)) - \beta''(t)\} > 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe $t_0 \in (0,1)$ tel que $x(t_0) - \beta(t_0) = 0$; alors $x'(t_0) - \beta'(t_0) = 0$. Soient $R = \max\{M, M'\}$, $0 < \varepsilon < b$ et $\delta = \delta(R, \varepsilon)$ donné par l'hypothèse (H_3); il existe alors $\xi > 0$ tel que

$$|s - t_0| < \xi \Rightarrow |(x(s) - \beta(s), x'(s) - \beta'(s))| < \delta.$$

Puisque $x(s)-\beta(s) \leq 0$ pour tout $s \in [t_0, t_0+\xi[$, par le théorème de la moyenne, il existe $t \in]t_0, t_0+\xi[$ tel que $x'(t)-\beta'(t) \leq 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
x'(t)-\beta'(t) &= \int_{t_0}^{t} (x''(s)-\beta''(s))\,ds \\
&= \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s),x'(s)) - f(s,\beta(s),\beta'(s))]\,ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} [f(s,\beta(s),\beta'(s)) - \beta''(s)]\,ds \\
&\geq \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s),x'(s)) - f(s,\beta(s),\beta'(s))]\,ds + b(t-t_0) \\
&\geq (-\varepsilon+b)(t-t_0) > 0,
\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

Si $x(0)=\beta(0)$, alors nécessairement $x'(0) \leq \beta'(0)$ et il découle des conditions aux limites que nous avons alors $x(1)=\beta(1)$ et $x'(1)-\beta'(1) \leq x'(0)-\beta'(0) \leq 0$; comme $x-\beta$ atteint dans ce cas son maximum aussi en 1, la seule possibilité est $x'(0)-\beta'(0) = x'(1)-\beta'(1) = 0$. Pour obtenir une contradiction, on raisonne comme précédemment en prenant $t_0 = 0$. Nous avons ainsi montré que $B=\emptyset$. De la même façon, on obtiendrait $A=\emptyset$.

Par ailleurs, d'une manière analogue à la preuve du théorème 3.2, nous pouvons montrer que

$$|x'|_0 \leq (2|p|_\infty + 1)M + \|q\|_1 < M'.$$

Remarquons que F est une sélection continue de l'opérateur $\mathcal{F}_1$ défini plus haut (i.e. $Fx \in \mathcal{F}_1 x$ pour tout $x \in \overline{\mathcal{U}}$) et que $\mathcal{F}_1$ n'a pas de point fixe sur $B(0,R)\backslash\mathcal{U}$. Considérons l'homotopie compacte $\mathcal{H} : \overline{\mathcal{U}} \times [0,1] \to C^1_{\mathrm{p}}$ définie par $\mathcal{H}(x,\lambda) = \lambda Fx + (1-\lambda)\mathcal{F}_1 x$. Si $x \in \partial\mathcal{U}$ et $x \in \mathcal{H}(x,\lambda)$, alors, comme $\mathcal{F}_1 x$ est convexe, $x \in \mathcal{F}_1 x$; ce qui est contradictoire. Nous avons enfin, pour R assez grand, et en utilisant les propriétés d'excision, d'invariance par homotopie et de normalisation du degré,

$$\begin{aligned}
d(I-F,\mathcal{U}) &= d(I-\mathcal{F}_1,\mathcal{U}) = d(I-\mathcal{F}_1, B(0,R)) = d(I-\mathcal{F}_0, B(0,R)) \\
&= d(I-\mathcal{G}_0, B(0,R)) = d(I, B(0,R)) = \pm 1. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque. L'hypothèse (H_3) est vérifiée si f est une fonction continue.

Théorème 3.4. *Si α et β sont respectivement sous-solution stricte et sur-solution stricte du problème* $(\mathcal{P})$ *et si f vérifie les hypothèses* (H_2) *et* (H_3)*, alors* $(\mathcal{P})$ *admet au moins une solution x telle que $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$ quel que soit $t \in I$.*

Démonstration. Il découle du lemme 3.3 que $d(I-F,\mathcal{U}) \neq 0$, donc le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution $x \in \mathcal{U}$. $\square$

4. Applications

Nous donnons dans ce paragraphe quelques applications du théorème 3.1.

4.1. Systèmes du type Liénard. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soient* $e \in \widetilde{L}^1$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *et* $g : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de Carathéodory telle que :*

(i) *il existe un entier* $n_0 \in [1, n]$ *et une constante* $M > 0$ *tels que :*
- $x_j g_j(t, x) \geq 0$, *p.p.* $t \in I$, *si* $|x_j| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M$, $j = 1, \ldots, n_0$,
- $x_j g_j(t, x) \leq 0$, *p.p.* $t \in I$, *si* $|x_j| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M$, $j = n_0 + 1, \ldots, n$;

(ii) $\displaystyle\limsup_{|x|\to\infty} \frac{|g(t,x)|}{|x|} < \frac{4\pi^2}{1 + \pi^2/3}$.

Alors le problème

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} x''(t) + \dfrac{d}{dt} \operatorname{grad} F(x(t)) + g(t, x(t)) = e(t), & p.p.\ t \in I, \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ (qu'on choisira par la suite suffisamment petit), $\lambda \in (0, 1]$ et x une solution périodique de l'équation

$$x'' + \varepsilon\eta(x) = \lambda\Big(-\frac{d}{dt} \operatorname{grad} F(x) - g(t, x) + e(t) + \varepsilon\eta(x)\Big). \tag{4.1}$$

En intégrant l'équation (4.1) nous obtenons

$$\lambda \int_0^1 g(t, x(t))\, dt + (1 - \lambda)\varepsilon \int_0^1 \eta(x(t))\, dt = 0, \tag{4.2}$$

ce qui peut s'écrire :
- $\lambda \int_0^1 g_k(t, x(t))\, dt + (1 - \lambda)\varepsilon \int_0^1 x_k(t)\, dt = 0$ si $k = 1, \ldots, n_0$,
- $\lambda \int_0^1 g_k(t, x(t))\, dt - (1 - \lambda)\varepsilon \int_0^1 x_k(t)\, dt = 0$ si $k = n_0 + 1, \ldots, n$.

D'autre part, il découle de (4.1) que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x''(t) \cdot x(t)\, dt = \lambda \int_0^1 \Big\{ e(t) - g(t, x(t)) - \frac{d}{dt} \operatorname{grad} F(x(t)) \Big\} \cdot \widetilde{x}(t)\, dt \\ - (1 - \lambda)\varepsilon \int_0^1 \eta(x(t)) \cdot \widetilde{x}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\|x'\|_2^2 \leq \int_0^1 |g(t, x(t)) - e(t)| \cdot |\widetilde{x}(t)| dt + \varepsilon \int_0^1 |x(t) \cdot \widetilde{x}(t)|\, dt.$$

L'hypothèse (ii) et le fait que g soit de Carathéodory impliquent l'existence d'une constante $b > 0$ et d'une fonction $h \in L^1$ telles que

$$b < \frac{4\pi^2}{1+\pi^2/3} \quad \text{et} \quad |g(t,x)| \leq h(t) + b|x|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

En utilisant les inégalités de Sobolev et de Wirtinger (propositions 2.4 et 2.5) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x'\|_2^2 &\leq \int_0^1 (h(t) + b(|\overline{x}| + |\widetilde{x}(t)|) + |e(t)|)|\widetilde{x}(t)|\,dt + \varepsilon \int_0^1 |\overline{x} + \widetilde{x}(t)||\widetilde{x}(t)|\,dt \\
&\leq (\|h\|_1 + (b+\varepsilon)|\overline{x}| + \|e\|_1)|\widetilde{x}|_0 + \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\|x'\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(\|h\|_1 + (b+\varepsilon)|\overline{x}| + \|e\|_1)\|x'\|_2 + \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\|x'\|_2^2.
\end{aligned}$$

Choisissons ε tel que $b + \varepsilon < 4\pi^2/(1+\pi^2/3) < 4\pi^2$. Nous avons alors

$$\|x'\|_2 \leq \frac{\|h\|_1 + (b+\varepsilon)|\overline{x}| + \|e\|_1}{2\sqrt{3}\big(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\big)} = \frac{K'}{\sqrt{n}}$$

et en appliquant encore une fois l'inégalité de Sobolev,

$$|\widetilde{x}|_0 \leq \frac{\|h\|_1 + (b+\varepsilon)|\overline{x}| + \|e\|_1}{12\big(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\big)}. \tag{4.4}$$

Par ailleurs, pour tout $t \in I$ nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\geq |\overline{x}| - |\widetilde{x}(t)| \\
&\geq |\overline{x}| - \frac{\|h\|_1 + (b+\varepsilon)|\overline{x}| + \|e\|_1}{12\big(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\big)} \\
&= \left(1 - \frac{b+\varepsilon}{12(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2})}\right)|\overline{x}| - \frac{\|h\|_1 + \|e\|_1}{12\big(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\big)}.
\end{aligned}$$

Posons $c_0 = 1 - (b+\varepsilon)/\big(12\big(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\big)\big)$ et $c_1 = (\|h\|_1 + \|e\|_1)/\big(12\big(1 - \frac{b+\varepsilon}{4\pi^2}\big)\big)$. Alors, puisque $b + \varepsilon < 4\pi^2/(1+\pi^2/3)$, c_0 est strictement positif, et nous allons montrer que nécessairement nous avons

$$|\overline{x}| \leq c \tag{4.5}$$

avec $c = (K + c_1)/c_0$ et $K = M + K'$. En effet, sinon nous avons $|x(t)| > K$ quel que soit $t \in I$; il existe alors un entier j et un réel $t \in I$ tels que $|x_j(t)| > \frac{1}{\sqrt{n}}K$. Cela implique que pour tout $t' \in I$,

$$\begin{aligned}
|x_j(t')| &= \left|x_j(t) + \int_t^{t'} x_j'(s)\,ds\right| \frac{K}{\sqrt{n}} - \int_t^{t'} |x_j'(s)|\,ds \\
&\geq \frac{K}{\sqrt{n}} - \|x'\|_2 \geq \frac{M}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

D'où l'existence d'un entier j, $1 \leq j \leq n$, tel que $|x_j(t)| > \frac{1}{\sqrt{n}}M$ pour tout $t \in I$. Comme x_j est continue, ou bien $x_j(t) > \frac{1}{\sqrt{n}}M$ pour tout $t \in I$, ou bien $x_j(t) < -\frac{1}{\sqrt{n}}M$ pour tout $t \in I$. Dans les deux cas, tenant compte de l'hypothèse (i) et de la relation (4.2), nous obtenons une contradiction. Finalement, de (4.4) et (4.5) découle l'existence d'une constante M_1 telle que

$$|x|_0 \leq M_1.$$

Si $\mathcal{H}$ est la matrice hessienne de $F(x)$, alors nous avons

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad} F(x) = \mathcal{H}(x)x',$$

et du théorème 3.1 découle le résultat cherché. □

Remarque. Si dans le théorème précédent nous supposons que $e \in \widetilde{L}^2$ et g est L^2-Carathéodory, avec une légère modification de la démonstration (voir [6]) nous pouvons remplacer l'hypothèse (ii) par

$$\text{(ii)}\ \limsup_{|x|\to\infty} \frac{|g(t,x)|}{|x|} < \frac{4\pi^2}{1+\pi/\sqrt{3}}.$$

Théorème 4.2 (Système de Duffing). *Soit $e \in \widetilde{L}^2$. Supposons que :*

(i) *B est une matrice $n \times n$ définie positive ou négative;*

(ii) *$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle qu'il existe $M > 0$ et n_0, $0 \leq n_0 \leq n$, vérifiant :*

- $x_j \dfrac{\partial G}{\partial x_j}(x) \geq 0$ *si* $|x_j| \geq M$, $j = 1, \dots, n_0$,
- $x_j \dfrac{\partial G}{\partial x_j}(x) \leq 0$ *si* $|x_j| \geq M$, $j = n_0+1, \dots, n$.

Alors le problème

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x''(t) + Bx'(t) + \operatorname{grad} G(x(t)) = e(t), \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

admet au moins une solution.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons pour $\lambda \in (0,1]$ la famille d'équations

$$x''(t) = \lambda[-Bx'(t) - \operatorname{grad} G(x(t)) + e(t)] + (\lambda - 1)\varepsilon\eta(x(t)). \tag{4.6}$$

Soit x une solution périodique éventuelle de (4.6). Nous obtenons alors, en multipliant (4.6) par $x'(t)$ et en intégrant,

$$\int_0^1 Bx'(t)\cdot x'(t)\,dt = \int_0^1 e(t)\cdot x'(t)\,dt.$$

Il découle de l'hypothèse (i) qu'il existe une constante b qui dépend de B telle que $|Bz \cdot z| \geq b|z|^2$. D'où, en utilisant les inégalités de Sobolev puis de Cauchy–Schwarz,

$$|\widetilde{x}|_0 \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\|x'\|_2 \leq \frac{1}{2b\sqrt{3}}\|e\|_2.$$

D'autre part, en intégrant (4.6) on déduit que

$$-\lambda \int_0^1 \operatorname{grad} G(x(t))\, dt = (1-\lambda)\varepsilon \int_0^1 \eta(x(t))\, dt. \tag{4.7}$$

L'hypothèse (ii) implique que nous avons nécessairement

$$|\overline{x}_j| < M + \frac{1}{2b\sqrt{3}}\|e\|_2, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

car sinon, il existerait j tel que $|\overline{x}_j| \geq M + \frac{1}{2b\sqrt{3}}\|e\|_2$, ce qui implique que

$$|x_j(t)| \geq |\overline{x}_j| - |\widetilde{x}_j(t)| \geq M \qquad \forall t \in I.$$

Nous avons donc, puisque $|x_j|$ est continue, ou bien $x_j(t) > M$ pour tout t, ou bien $x_j(t) < M$ pour tout t. Dans les deux cas, ceci contredit la relation (4.7). Nous avons finalement obtenu la majoration

$$|x|_0 \leq \sqrt{n}\left(M + \frac{1}{2b\sqrt{3}}\|e\|_2\right) + \frac{1}{2b\sqrt{3}}\|e\|_2.$$

Et nous concluons en appliquant le théorème 3.1. □

4.2. Résultats de multiplicité du type Ambrosetti–Prodi. Soient $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour chaque $r \in \mathbb{R}$, nous considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}^r) \qquad \begin{cases} x''(t) + k(x(t))x'(t) + g(t, x(t)) = r, & \text{p.p. } t \in I, \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1). \end{cases}$$

Lemme 4.3. *Supposons qu'il existe des constantes $R > 0$ et $r \in \mathbb{R}$ telles que*

$$r < g(t,u), \qquad \text{p.p. } t \in [0,1], \forall u \in \mathbb{R} \text{ tel que } |u| \geq R.$$

Alors il existe une constante $M_1 > 0$ (qui dépend de $r, R,$ et g) telle que toute solution x de $(\mathcal{P}^s)$ avec $s \leq r$ satisfait $|x|_1 \leq M_1$.

Démonstration. Soit x une solution de $(\mathcal{P}^s)$, avec $s \leq r$. Nous avons alors

$$\int_0^1 g(t, x(t))\, dt = s, \tag{4.8}$$

et d'autre part

$$\int_0^1 x''(t)\widetilde{x}(t)\, dt + \int_0^1 \widetilde{x}(t) g(t, x(t))\, dt = 0. \tag{4.9}$$

Posons $h(t) = \min\{r, -h_R\}$ (où $h_R \in L^1$ est donné par le fait que g est de Carathéodory). Alors nous avons $h(t) \leq 0$ et $g(t, x(t)) \geq h(t)$ p.p. sur I, et tenant compte de (4.8),

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g(t, x(t))|\, dt &= \int_A -g(t, x(t))\, dt + \int_B g(t, x(t))\, dt \\ &= \int_A -g(t, x(t))\, dt + s - \int_A g(t, x(t))\, dt\end{aligned}$$

avec $A = \{t \in I : g(t, x(t)) < 0\}$ et $B = \{t \in I : g(t, x(t)) \geq 0\}$; d'où

$$\int_0^1 |g(t, x(t))|\, dt \leq r - 2\int_A g(t, x(t))\, dt \leq r - \int_A h(t)\, dt \leq r + 2\|h\|_1.$$

Il découle alors de (4.9) que $\int_0^1 x'^2(t) dt \leq 2|x|_0(r + 2\|h\|_1)$. Enfin, en appliquant l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\|x'\|_2 \leq \frac{r + 2\|h\|_1}{\sqrt{3}}. \tag{4.10}$$

Par ailleurs, il existe t_0 tel que $|x(t_0)| < R$; car sinon nous aurions $|x(t)| \geq R$ pour tout $t \in [0, 1]$. Or, par hypothèse nous avons $r < \int_0^1 g(t, x(t))\, dt$, ce qui contredit (4.8). De l'inégalité (4.10) et de la relation $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)\, ds$, nous obtenons l'existence d'une constante positive M, qui dépend de r, g et R, telle que

$$|x|_0 \leq M.$$

Du théorème 3.1 (en prenant $\varepsilon = 0$), il découle l'existence d'une constante M' telle que

$$|x'|_0 \leq M',$$

d'où le résultat cherché avec $M_1 = \max\{M, M'\}$. □

Lemme 4.4. *Supposons qu'il existe des constantes $R^* > 0$ et $r^* \in \mathbb{R}$ telles que :*

- $\sup\operatorname{ess}_t g(t, 0) < r^*$,
- $g(t, u) \geq r^*$, *p.p.* $t \in I$, $\forall u \in \mathbb{R}$ *tel que* $|u| \geq R^*$.

Soient $r_1 = \lim_{R\to\infty}(\sup\{r \in \mathbb{R} : g(t, u) \geq r,$ *p.p.* $t \in I$, $\forall u$ *tel que* $|u| \geq R\})$ *et* $S = \{r \in \mathbb{R} : (\mathcal{P}^r)$ *admet une solution*$\}$ *et* $r_0 = \inf\ S$. *Alors,* $-\infty < r_0 < r_1$ *et* $[r_0, r_1) \subset S$.

Démonstration. S est non vide car $\widehat{r} = \sup\operatorname{ess}_t g(t, 0)$ appartient à S. En effet, nous avons $\widehat{r} < r_1$, 0 est une sur-solution de $\mathcal{P}^{\widehat{r}}$ et $-R^*$ est une sous-solution de $\mathcal{P}^{\widehat{r}}$. Il en résulte (théorème 3.2) que $\mathcal{P}^{\widehat{r}}$ admet au moins une solution.

Soit $r \in S$; montrons qu'alors $[r, r_1) \subset S$. Si $s \in [r, r_1)$, alors de la définition de r_1 on déduit qu'il existe $R > 0$ tel que $g(t, u) \geq s$ pour presque tout $t \in I$ et pour $|u| \geq R$. Soit x_r une solution de $(\mathcal{P}^r)$; alors x_r et $-R$ sont respectivement sur-solution et sous-solution de $(\mathcal{P}^s)$ (pour R assez grand). Donc $s \in S$. Il découle de ce qui précède que $(r_0, r_1) \subset S$. Comme g est de Carathéodory, il existe $h_{R^*} \in L^1$ telle que $|g(t,u)| \leq h_{R^*}(t)$ pour presque tout $t \in I$ et pour $|u| \leq R^*$. Par ailleurs, si $|u| \geq R^*$, on a $g(t,u)r^* \geq -|r^*|$. D'où $g(t,x) \geq -|r^*| - h_{R^*}(t)$ pour presque tout $t \in [0,1]$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour chaque $r \in (r_0, r_1)$, si x_r est une solution de $(\mathcal{P}^r)$, alors

$$r = \int_0^1 g(t, x_r(t))\, dt \geq -|r^*| - |h_{R^*}|.$$

On en déduit que $r_0 > -\infty$.

Il reste à prouver que $r_0 \in S$. Soit $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite dans S qui converge vers r_0 et telle que $r_0 < s_n \leq \widehat{r}$. Pour chaque n, soit x_n une solution de $(\mathcal{P}^{s_n})$. Il découle du lemme précédent que $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée par une constante M_1 dans C^1. D'autre part, il existe une fonction $h_{M_1} \in L^1$ telle que $|g(t, x_n(t))| \leq h_{M_1}(t)$, p.p. $t \in I$, pour tout n. Nous avons donc, si $t_1, t_2 \in I$,

$$|x_n(t_2) - x_n(t_1)| \leq M_1 |t_2 - t_1|,$$

et

$$|x_n'(t_2) - x_n'(t_1)| \leq (cM_1 + r^*)|t_2 - t_1| + \int_{t_1}^{t_2} h_{M_1}(t)\, dt,$$

avec $c = \max\{|k(x)| : x \in [-M_1, M_1]\}$. D'où l'équicontinuité de $(x_n)_{n\geq 0}$. Par le théorème d'Arzelà–Ascoli, nous pouvons extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers x_0 dans C^1. Par passage à la limite dans l'expression

$$x_{\varphi(n)}'(t) - x_{\varphi(n)}'(0) + \int_0^t k(x(\tau))x'(\tau)\, d\tau + \int_0^t [g(\tau, x_{\varphi(n)}(\tau)) - s_{\varphi(n)}]\, d\tau = 0,$$

et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons que x_0 est solution de $(\mathcal{P}^{r_0})$. □

Théorème 4.5. *Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, si nous supposons de plus que pour tout $R > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |g_R(t, x_1) - g_R(t, x_2)| \leq \varepsilon,$$

où g_R est la restriction de g à $I \times (-R, R)$, alors il existe $r_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 < r_1$, tel que

(i) *si $r < r_0$, alors $(\mathcal{P}^r)$ n'admet pas de solution;*
(ii) *si $r = r_0$, alors $(\mathcal{P}^r)$ admet au moins une solution;*
(iii) *si $r \in (r_0, r_1)$, alors $(\mathcal{P}^r)$ admet au moins deux solutions.*

Démonstration. Soient r_0 et r_1 définis dans le lemme 4.4. Alors (i) découle de la définition de r_0 et (ii) est une conséquence du lemme 4.4.

Pour chaque $r \in \mathbb{R}$ donné, nous définissons les opérateurs $L : C^1_{\mathrm{p}} \to C^0$ et $N_r : C^1_{\mathrm{p}} \to C^0$ par

$$Lx(t) = x'(t) - x'(0) - \int_0^t x(s)\,ds,$$
$$N_r x(t) = \int_0^t [r - g(s,x(s)) - k(x(s))x'(s)]\,ds.$$

Posons

$$T_r = I - L^{-1}N_r.$$

Pour démontrer (iii), on considère $r \in (r_0, r_1]$ et x_0 une solution de $(\mathcal{P}^{r_0})$. Alors x_0 est une sur-solution stricte de $(\mathcal{P}^r)$. Comme $r < r_1$, il existe $R > 0$ (assez grand pour que $-R \le x_0(t)$ pour tout t) tel que

$$g(t,u) > r, \qquad \text{p.p. } t \in I, \text{ et pour } |u| \ge R.$$

Nous en déduisons alors que $-R$ est sous-solution stricte de $(\mathcal{P}^r)$. D'autre part, par le lemme 4.4, il existe $M_1 = M_1(r,g)$ telle que toute solution de $(\mathcal{P}^s)$, avec $s \le r$, vérifie $|x|_1 \le M_1$. Posons

$$\mathcal{U}_1 = \{x \in C^1_{\mathrm{p}} : -R < x(t) < x_0(t)\ \forall t \in I, |x'|_0 < M'\}$$

où $M' > M_1$. En appliquant le lemme 3.3 et le théorème 3.4, nous obtenons $d(T_r, \mathcal{U}_1) = \pm 1$ et $(\mathcal{P}^r)$ admet donc une solution $x_1 \in \mathcal{U}_1$.

Soit d'autre part

$$\mathcal{U}_2 = \{x \in C^1_{\mathrm{p}} : -R < x(t) < M_1\ \forall t \in I, |x'|_0 < M'\}.$$

Nous savons que quel que soit $s < r_0$, $(\mathcal{P}^s)$ n'admet pas de solution dans $\overline{\mathcal{U}}_2$, donc $d(T_s, \mathcal{U}_2) = 0$. D'autre part (pour R suffisamment grand), pour tout $s \le r$, toute solution de $(\mathcal{P}^s)$ vérifie $-R < x(t) < M_1$ et $|x'|_0 < M'$, donc $d(T_s, \mathcal{U}_2)$ est bien défini et par la propriété d'invariance par homotopie, on obtient $d(T_r, \mathcal{U}_2) = 0$. En utilisant la propriété d'additivité du degré, nous obtenons $d(T_r, \mathcal{U}_2 \setminus \overline{\mathcal{U}}_1) = \mp 1$. D'où l'existence d'une deuxième solution de $(\mathcal{P}^r)$, $x_2 \in \mathcal{U}_2 \setminus \overline{\mathcal{U}}_1$. □

Remarque. Dans le cas classique, le théorème 4.5 est démontré dans [7].

Références

[1] A. Ambrosetti and G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. **93** (1972), 231–246.

[2] S. Bernstein, *Sur les équations du calcul des variations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **29** (1912), 431–485.

[3] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, vol. 1, PWN, Warszawa, 1982.

[5] N. EL KHATTABI, *Sur les solutions périodiques d'équations du type Liénard*, Rapport du Dép. de Math. et Stat., Univ. de Montréal, 1990.

[6] ———, *Existence et multiplicité de solutions périodiques au sens de Carathéodory pour des équations différentielles non linéaires*, Thèse de Ph.D., Univ. de Montréal, 1993.

[7] C. FABRY, J. MAWHIN AND M. N. NKASHAMA, *A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equations*, Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 173–180.

[8] G. FOURNIER AND J. MAWHIN, *On periodic solutions of forced pendulum-like equations*, Séminaire de Mathématique, Louvain-la-Neuve, **48**, 1984.

[9] M. FRIGON, *Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires*, Dissertationes Math. **196** (1990).

[10] ———, *Boundary and periodic value problems for systems of nonlinear second order differential equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 259–274.

[11] A. GRANAS, *Sur la notion du degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **7** (1959), 191–194.

[12] ———, *Theorem on antipodes and theorems on fixed points for a certain class of multivalued mappings in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **7** (1959), 271–275.

[13] ———, *Sur la méthode de continuité de Poincaré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **282** (1976), 983–985.

[14] A. GRANAS ET Z. GUENNOUN, *Quelques résultats dans la théorie de Bernstein–Carathéodory de l'équation* $y'' = f(t, y, y')$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **306** (1988), 703–706.

[15] A. GRANAS, R. B. GUENTHER AND J. W. LEE, *Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems*, J. Math. Pures Appl. **70** (1991), 153–196.

[16] Z. GUENNOUN, *Existence au sens de Carathéodory pour des problèmes aux limites non linéaires*, Thèse de Ph.D., Univ. de Montréal, 1988.

[17] M. MARTELLI, *On forced non linear oscillations*, J. Math. Anal. Appl. **69** (1979), 496–504.

[18] J. MAWHIN, *An extension of a theorem of A. C. Lazer on forced non linear oscillations*, J. Math. Anal. Appl. **40** (1972), 20–29.

[19] ———, *Periodic oscillations of forced pendulum-like equations*, Ordinary and Partial Differential Equations, Lecture Notes in Math., vol. 964, Springer-Verlag, 1982, pp. 458–476.

[20] R. REISSING, *Extension of some results concerning the generalized Liénard equation*, Ann. Mat. Pura Appl. **104** (1975), 269–281.

[21] N. ROUCHE ET J. MAWHIN, *Équations différentielles ordinaires, stabilité et solutions périodiques,* t. 2, Masson, 1973.

[22] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, vol. 1, Springer-Verlag, 1986.

Manuscript received March 30, 1995

NOHA EL KHATTABI
Département de Mathématiques et Informatique
Université Mohamed V
Rabat, MAROC