Topological Methods in Nonlinear Analysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 3, 1994, 295–306

EXISTENCE DE DEUX SOLUTIONS POSITIVES POUR UN PROBLÈME ELLIPTIQUE À PARAMÈTRE DANS $\mathbb{R}^n$

Alice Simon — Peter Volkmann

Dédié à Monsieur Jean Leray

1. Introduction

On considère le problème

$$(1.1) \qquad \begin{cases} Lu = f(x,u,\lambda), \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ n > 2,\ \lambda > 0, \\ u(x) > 0, \end{cases}$$

où f est une non-linéarité positive surlinéaire et sous-critique, $f(x,0,\lambda) > 0$ et $\lim_{|x|\to\infty} f(x,0,\lambda) = 0$, $L = -\Delta + c^2$, $c > 0$. L'opérateur L admet une solution élémentaire principale $G(x,y)$ [11]. Dans un problème analogue avec $f(x,0,\lambda) = 0$, les solutions tendent exponentiellement vers zéro. Dans le problème (1.1), $\lim_{|x|\to\infty} f(x,0,\lambda) = 0$ mais pas nécessairement exponentiellement. On introduit dans le paragraphe 2 la notion de poids adapté à $\underline{G}$, opérateur intégral de noyau $G(x,y)$. Dans le paragraphe 3, on donne une majoration a priori pour les solutions de (1.1) de classe C^2, qui améliore la démonstration de [11] grâce à des résultats de Li [9] (voir Isselkou [6], [7]). Enfin, l'outil essentiel est un théorème de point fixe démontré dans [11]. Par rapport au théorème analogue dû à Krasnosel'skiĭ cité dans [3], l'hypothèse $\Phi(0) = 0$ n'existe pas. Grâce à ce théorème on obtient, pour λ assez petit, deux solutions ayant le comportement asymptotique de $f(x,0,\lambda)$ (voir [10] pour un cas particulier). Citons pour mémoire dans le cas d'un ouvert borné les travaux de Crandall et Rabinowitz [2], de Figuereido, Lions et Nussbaum [3], et dans le cas de $\mathbb{R}^n$ les travaux de Zhu [12] et Chabrowski [1]. Les méthodes employées ici sont entièrement différentes.

2. Espaces à poids

Rappelons que l'opérateur L admet une solution élémentaire principale telle que

$$G(x,y) \underset{|x-y|\to\infty}{\sim} d_n \frac{e^{-c|x-y|}}{|x-y|^{(n-1)/2}}$$

(voir [4], [11]). On désigne par $\underline{G}$ l'opérateur intégral de noyau $G(x,y)$, i.e.

$$\underline{G}\varphi(x) = \int G(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Soit $\omega : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty[$ une fonction croissante de classe C^∞ telle que $\omega(+\infty) = +\infty$. On pose

$$\omega_\delta(x) = [\omega(|x|)]^\delta, \qquad \delta > 0$$

($|x|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$).

DÉFINITION 2.1. On dit que ω est un *poids adapté à* $\underline{G}$ s'il existe trois constantes positives a, γ_1, γ_2 telles que pour tout $\delta \in]0,a[$ on ait

$$0 < \gamma_1 \le \int G(x,y)\frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\delta(y)}\,dy \le \gamma_2,$$
$$\int \left|\frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y)\right| \frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\delta(y)}\,dy \le \gamma_2, \qquad i \in \{1,\dots,n\}.$$

EXEMPLES FONDAMENTAUX.

1. $\omega(t) = e^t$ est un poids adapté à $\underline{G}$, avec $a = c$ (cf. [10]).
2. $\omega(t) = 1 + t$ est un poids adapté à $\underline{G}$, avec a arbitraire (vérification immédiate).

Soit ω un poids adapté à $\underline{G}$ et $\delta < a$.

DÉFINITION 2.2.

$$C^k_{\omega_\delta} = \{u \in C^k(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|\omega_\delta(x) < \infty,\ |\alpha| \le k\}.$$

PROPOSITION 2.1. *$C^k_{\omega_\delta}$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_{k,\delta} = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|\omega_\delta(x).$$

PROPOSITION 2.2.

(i) *L'injection* $C^k_{\omega_{\delta_1}} \to C^l_{\omega_{\delta_2}}$ *est continue pour* $k \geq l$ *et* $\delta_1 \geq \delta_2$.

(ii) *L'injection* $C^{k+1}_{\omega_{\delta_1}} \to C^k_{\omega_{\delta_2}}$ *est compacte pour* $\delta_1 > \delta_2$.

DÉMONSTRATION. (i) est évident.

(ii) La démonstration est analogue à celle de la proposition 7 de [11]. En effet, cette démonstration est basée sur la propriété suivante:

$$\delta_1 > \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{|x|\to\infty} \frac{\omega_{\delta_1}(x)}{\omega_{\delta_2}(x)} = \infty.$$

PROPOSITION 2.3. *L'application* $\underline{G} : C^0_{\omega_\delta} \to C^1_{\omega_\delta}$ *est continue.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in C^0_{\omega_\delta}$. Alors

$$\begin{aligned}
|\underline{G}u(x)\omega_\delta(x)| &= \left| \int \omega_\delta(x) G(x,y) u(y)\, dy \right| \\
&\leq \int \frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\delta(y)} G(x,y) \{|u(y)|\omega_\delta(y)\}\, dy \\
&\leq \|u\|_{0,\delta} \sup_x \int G(x,y) \frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\delta(y)}\, dy \leq \gamma_2 \|u\|_{0,\delta}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\left| \omega_\delta(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \int G(x,y) u(y)\, dy \right| &= \left| \int \omega_\delta(x) \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) u(y)\, dy \right| \\
&\leq \|u\|_{0,\delta} \sup_x \int \frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\delta(y)} \left| \frac{\partial G}{\partial x_i}(x,y) \right| dy \leq \gamma_2 \|u\|_{0,\delta}.
\end{aligned}$$

3. Majoration a priori

On démontre l'existence d'une majoration a priori pour les solutions positives, de classe C^2, tendant vers zéro à l'infini d'équations semi-linéaires elliptiques dans $\mathbb{R}^n$. Elle complète celle de [11]. On utilise les résultats de Li [9] pour assurer que les solutions éventuelles atteignent leur maximum en 0. Soit le problème

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} Lu = g(x,u), & \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ n > 2, \\ u(x) > 0. & \end{cases}$$

On fait les hypothèses (H):

(H_1) $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement höldérienne et $x \mapsto g(x,t)$ bornée.

(H_2) $\exists k \in \,]1, (n+2)/(n-2)[$ tel que $\lim_{t\to\infty} g(x,t)t^{-k} = G(x)$ uniformément en x, avec G continue et $G(0) > 0$.

(H$_3$) $g(x,t) = g(|x_1| \searrow, \dots, |x_n| \searrow, t)$, la décroissance par rapport à chaque $|x_i|$ est stricte.

(H$_4$) $g_t(x,t)$ existe et $\lim_{t\to 0, |x|\to\infty} g_t(x,t) = 0$.

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses* (H) *il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour toute solution* u *de* (3.1) *de classe* C^2, *on ait* $u \leq M$.

DÉMONSTRATION. On adapte la démonstration du théorème 3 dans [11]. On raisonne par contradiction. Supposons le théorème faux. Alors il existe une suite de solutions u_p de (3.1) de classe C^2 telles que

$$\sup u_p(x) = M_p \qquad \text{avec} \qquad \lim_{p\to\infty} M_p = \infty$$

Grâce aux hypothèses (H), on a $M_p = u_p(0)$ (cf. Li [9]). On opère un changement de variables dans $\mathbb{R}^n$ et un changement de fonction:

$$\begin{cases} x = \lambda_p y, \\ u_p(x) = \lambda_p^{-2/(k-1)} v_p(y), \end{cases}$$

où λ_p est déterminé par $\lambda_p^{2/(k-1)} M_p = 1$. On a $\lim_{p\to\infty} \lambda_p = 0$.

Soit $d > 0$ fixé, et $B_{d/\lambda_p}(0)$ la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et rayon d/λ_p. On a

$$\sup_{|y|<d/\lambda_p} v_p(y) = \lambda_p^{2/(k-1)} \sup_{|x|<d} u_p(x) = 1.$$

D'autre part, v_p est solution de

$$\Delta v_p - c^2 \lambda_p^2 v_p + \lambda_p^{2k/(k-1)} g(\lambda_p y, \lambda_p^{-2/(k-1)} v_p) = 0.$$

Soit $R > 0$ fixé, tel que $B_R(0) \subseteq B_{d/\lambda_p}(0)$. On a $v_p \leq 1$; d'après l'estimation elliptique dans $W^{2,q}(B_R)$ on obtient

$$\|v_p\|_{W^{2,q}(B_R)} \leq C, \qquad \forall q.$$

Grâce aux théorèmes de Sobolev avec $n < q < 2n$, on obtient

$$\|v_p\|_{C^{0,\beta}(B_R)} \leq C \qquad (0 < \beta \leq 2 - n/q)$$

(β est arbitraire entre 0 et 1). D'autre part, $y \mapsto g(\lambda_p y, \lambda_p^{-2/(k-1)} v_p)$ est localement höldérienne d'exposant μ; grâce aux estimations de Schauder, on trouve

$$\|v_p\|_{C^{2,\gamma}(\overline{B}_R)} \leq C \qquad (\gamma = \beta\mu)$$

où C dépend de R mais non de v_p. Alors il existe une sous-suite, notée encore v_p, qui converge dans $C^{2,\tilde{\gamma}}(\overline{B}_R)$, $\tilde{\gamma} < \gamma$, vers v. La fonction v est définie sur $\mathbb{R}^n$, et $v(0) = 1$. De plus, quand $p \to \infty$,

$$\frac{g(\lambda_p y, \lambda_p^{-2/(k-1)} v_p)}{\lambda_p^{-2k/(k-1)} v_p^k} \to G(0) \qquad \text{d'après (H}_2\text{)},$$

car $\lambda_p^{-2/(k-1)} v_p \to \infty$, d'où

$$\lambda_p^{2k/(k-1)} g(\lambda_p y, \lambda_p^{-2/(k-1)} v_p) \to G(0)[v(y)]^k.$$

Par continuité, v est solution de

$$\begin{cases} \Delta v + G(0) v^k = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

Par homothétie,

$$\begin{cases} \Delta v + v^k = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

Mais l'équation $\Delta v + v^k = 0$, $1 < k < (n+2)/(n-2)$, n'a pas de solution positive de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n$ (Gidas et Spruck [5]). On aboutit ainsi à une contradiction.

REMARQUE. L'hypothèse (H_3) du théorème 3.1 est très forte. Il serait intéressant d'affaiblir cette hypothèse, et d'obtenir l'existence d'une majoration a priori dans le cas de coefficients tendant vers zéro à l'infini, sans hypothèse de symétrie et de décroissance.

4. Non-linéarités admises

Revenons au problème (1.1). Comme dans [10], on considère l'équation intégrale non linéaire

$$u = \Phi_\lambda(u) \tag{4.1}$$

avec

$$\Phi_\lambda u(x) = \int G(x,y) f(y, u(y), \lambda)\, dy.$$

On considère les hypothèses suivantes:

(F_1) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x, 0, \lambda) = \lambda h(x)$, et il existe un poids ω adapté à $\underline{G}$ et trois constantes α, β, δ ($\delta < a$) tels que

$$0 < \alpha \le h(x)\omega_\delta(x) \le \beta, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

(F_2) $t \mapsto f_t(x, t, \lambda)$ est continue, croissante et $f_t(x, 0, \lambda) \ge 0$.

(F_3) Il existe $\mu < \delta$ avec $\delta k - \mu(k-2) < a$ et deux fonctions positives $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0_{\omega_\mu}$ telles que

$$\varphi_1(x,\lambda) t^{k-1} \le f_t(x,t,\lambda) \le \lambda \varphi_2(x)(1+t)^{k-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+).$$

(F'_3) Il existe $\mu < \delta$ avec $\delta(1 - 1/k) + \mu/k < a$ et deux fonctions positives $\varphi_1, \psi_2 \in C^0_{\omega_\mu}$ telles que

$$\varphi_1(x,\lambda) t^{k-1} \le f_t(x,t,\lambda) \le \psi_2(x,\lambda) t^{k-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+).$$

Dans (F_3), (F'_3), $\varphi_1 \in C^0_{\omega_\mu}$ signifie $x \mapsto \varphi_1(x,\lambda) \in C^0_{\omega_\mu}$ (de même pour ψ_2); et k est le réel défini dans (H_2).

DÉFINITION. On dira que f satisfait à la condition (C) (resp. (C′)) si elle vérifie les hypothèses (H) et (F_1), (F_2), (F_3) (resp. (H) et (F_1), (F_2), (F_3')).

EXEMPLES. Dans les exemples ci-dessous toutes les fonctions intervenant sont positives, localement höldériennes, et vérifient la condition de symétrie (H_3).

1. $f(x,t,\lambda) = \lambda[h_1(x) + c(x)t]^k$,
$$h(x) = [h_1(x)]^k, \qquad h \in C^0_{\omega_\delta}, \qquad h(x)\omega_\delta(x) \geq \alpha > 0,$$
$$1 < k < \tfrac{n+2}{n-2}, \qquad c \in C^0_{\omega_\mu}, \qquad \delta k - \mu(k-2) < a.$$
f vérifie (C).
2. $f(x,t,\lambda) = \lambda[h(x) + b(x)t^k]$,
$$h \in C^0_{\omega_\delta}, \qquad h(x)\omega_\delta(x) \geq \alpha > 0, \qquad 1 < k < \tfrac{n+2}{n-2},$$
$$b \in C^0_{\omega_\mu}, \qquad \delta(1 - 1/k) + \mu/k < a.$$
f vérifie (C′).
3. $f(x,t,\lambda) = \lambda h(x) + b(x)t^k$,
$$h \in C^0_{\omega_\delta}, \qquad h(x)\omega_\delta(x) \geq \alpha > 0, \qquad 1 < k < \tfrac{n+2}{n-2},$$
$$b \in C^0_{\omega_\mu}, \qquad \delta(1 - 1/k) + \mu/k < a.$$
f vérifie (C′).

Dans le premier exemple, $f_t(x,0,\lambda) \geq 0$, alors que dans le second $f_t(x,0,\lambda) \equiv 0$. Le troisième exemple est un problème de perturbation.

Soit maintenant δ donné par (F_1); on fixe δ' tel que
$$\frac{\delta - \mu}{k} \leq \delta' < \delta.$$
Soit E l'espace de Banach $C^0_{\omega_{\delta'}}$ et K le cône des fonctions positives de E ($K = \{u \in E : u(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$).

PROPOSITION 4.1. *Si f vérifie (C) ou (C′), les solutions de $u = \Phi_\lambda(u)$ dans K sont dans $C^0_{\omega_\delta}$ et il existe une majoration a priori dans $C^0_{\omega_\delta}$.*

DÉMONSTRATION. Soit u une solution de $u = \Phi_\lambda(u)$ dans K. On a
$$\begin{aligned}(u\omega_\delta)(x) &= \int \omega_\delta(x)G(x,y)f(y,u(y),\lambda)\,dy \\ &\leq \lambda \int G(x,y)\omega_\delta(x)h(y)\,dy + \int \omega_\delta(x)G(x,y)u(y)f_t(y,u(y),\lambda))\,dy \\ &= \lambda I_1 + I_2.\end{aligned}$$
Or
$$I_1 = \int \omega_\delta(x)\frac{G(x,y)}{\omega_\delta(y)}h(y)\omega_\delta(y)\,dy \leq \beta\gamma_2$$
(d'après la définition 2.1 et (F_1)). Pour majorer I_2, on considère deux cas séparément.

1. On suppose que (F_3) est vérifiée. Alors on a

$$\begin{aligned}I_2 &\le \lambda \int \omega_\delta(x)G(x,y)u(y)\varphi_2(y)(1+u(y))^{k-1}\,dy\\ &\le \lambda \int \frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\mu(y)}G(x,y)[\varphi_2(y)\omega_\mu(y)]\frac{[u(y)\omega_\delta(y)]^{1-\mu/\delta}}{\omega_{\delta-\mu}(y)}u(y)^{\mu/\delta}(1+u(y))^{k-1}\,dy.\end{aligned}$$

D'après (F_3) et le théorème 3.1, on obtient

$$I_2 \le \lambda\|\varphi_2\|_{0,\mu}\gamma_2 M^{\mu/\delta}(1+M)^{k-1}(\|u\|_{0,\delta})^{1-\mu/\delta},$$

d'où

$$\|u\|_{0,\delta} \le \lambda\beta\gamma_2 + \lambda\|\varphi_2\|_{0,\mu}(1+M)^{k-1}\gamma_2 M^{\mu/\delta}(\|u\|_{0,\delta})^{1-\mu/\delta},$$

et donc

$$\|u\|_{0,\delta} \le M_1.$$

2. Supposons (F_3') vérifiée. On obtient de manière analogue

$$\begin{aligned}I_2 &\le \int \omega_\delta(x)G(x,y)u(y)\psi_2(y,\lambda)u(y)^{k-1}\,dy\\ &\le M^{k-1+\mu/\delta}\int \frac{\omega_\delta(x)}{\omega_\mu(y)}G(x,y)[\psi_2(y,\lambda)\omega_\mu(y)]\frac{[u(y)\omega_\delta(y)]^{1-\mu/\delta}}{\omega_{\delta-\mu}(y)}\,dy\\ &\le \|\psi_2\|_{0,\mu}M^{k-1+\mu/\delta}\gamma_2(\|u\|_{0,\delta})^{1-\mu/\delta},\end{aligned}$$

d'où la majoration comme dans le premier cas.

On considère maintenant une équation perturbée

$$u = \Phi_\lambda(u+\tau v), \qquad \tau \ge 0,$$

où v satisfait aux hypothèses suivantes:

(i) $v(x) \ge 0$ $(\not\equiv 0)$, localement höldérienne, v vérifie (H_3).
(ii) si f vérifie (C), $v \in C^0_{\delta-\mu}$; si f vérifie (C′), $v \in C^0_{(\delta-\mu)/k}$.

PROPOSITION 4.2. *Si f vérifie* (C) *ou* (C′), *et si v vérifie les conditions précédentes, alors les solutions de $u = \Phi_\lambda(u+\tau v)$ dans K sont dans $C^0_{\omega_\delta}$ et il existe une majoration a priori dans E.*

DÉMONSTRATION. Analogue à celle de la proposition 4.1, le fait essentiel étant qu'avec les hypothèses faites, $\Phi_\lambda(u+\tau v) \in C^0_{\omega_\delta}$. Nous donnons maintenant la forme du théorème de point fixe utilisée ici. E est un espace de Banach, K un cône de E. On note

$$\overline{B}_\rho = \{u \in K : \|u\| \le \rho\}, \qquad \rho > 0.$$

Soient deux nombres r, R tels que $0 < r < R$.

THÉORÈME 4.1. *Soit* $\Phi : \overline{B}_R \to K$ *une application compacte telle que*

(i) $u \neq s\Phi(u)$, $s \in [0,1]$, $u \in K$, $\|u\| = r$,

(ii) *il existe* $\tau_0 > 0$ *et* $\Psi : [0,\tau_0] \times \overline{B}_R \to K$ *compacte telle que*

$$\Psi(0,u) = \Phi(u),$$

$$u \neq \Psi(\tau,u) \qquad si \quad \begin{cases} \text{(a) } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \ u \in K, \ \|u\| = R, \\ \text{(b) } \tau = \tau_0, \ u \in K, \ \|u\| \leq R. \end{cases}$$

Alors Φ *a au moins deux points fixes* $u_1 \neq u_2$ *tels que*

$$\|u_1\| < r < \|u_2\| < R.$$

DÉMONSTRATION. Il est facile de montrer que les conditions du théorème 4.1 entraînent que les hypothèses du théorème 5 de [11] sont vérifiées.

5. Théorème d'existence

THÉORÈME 5.1. *Si* f *vérifie* (C) *ou* (C′), *alors il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour* $\lambda \in]0,\lambda_0[$ *le problème* (1.1) *ait deux solutions de classe* C^2 *dans* $C^0_{\omega_\delta}$.

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 4.1 à l'équation intégrale non linéaire (4.1); c'est-à-dire, on montre que l'on peut choisir $r < R$ tels que les hypothèses du théorème soient vérifiées, avec $\Psi(\tau,u) = \Phi_\lambda(u+\tau v)$, où v satisfait aux hypothèses de la proposition 4.2.

Montrons d'abord que $\Phi_\lambda : \overline{B}_\rho \to K$ est compacte, pour tout $\rho > 0$. On a $\Phi_\lambda(K) \subset K$ (cf. proposition 4.2); la compacité de Φ_λ s'obtient grâce à la décomposition

$$\begin{array}{ccccccc} u & \longmapsto & \widetilde{f}(u) & \overset{G}{\longmapsto} & G\widetilde{f}(u) & \overset{i}{\longmapsto} & G[\widetilde{f}(u)] \\ K & \longrightarrow & C^0_{\omega_\delta} & \longrightarrow & C^1_{\omega_\delta} & \longrightarrow & K \end{array}$$
$$(\widetilde{f} : u \mapsto (x \mapsto f(x,u(x),\lambda))).$$

Dans le schéma précédent les applications sont continues, la dernière étant compacte.

Vérifions la condition (i) du théorème 4.1. On démontre en fait

(i)* $\exists\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0,\lambda_0[$, il existe $r > 0$ tel que l'équation

$$u = s\Phi_\lambda(u) \tag{5.1}$$

n'a pas de solution pour $s \in [0,1], u \in K, \|u\| = r$.

Supposons le contraire, soit u solution de (5.1). On aurait

$$\begin{aligned}(u\omega_{\delta'})(x) &= s\int G(x,y)\omega_{\delta'}(x)f(y,u(y),\lambda)\,dy \\ &\leq \lambda\beta\gamma_2 + \int G(x,y)\omega_{\delta'}(x)u(y)f_t(y,u(y),\lambda)\,dy.\end{aligned}$$

1) Supposons (F_3) vérifiée. La seconde intégrale peut être majorée par

$$\lambda \int G(x,y)\omega_{\delta'}(x)u(y)\varphi_2(y)(1+u(y))^{k-1}\,dy$$
$$\leq \lambda \int G(x,y)\frac{\omega_{\delta'}(x)}{\omega_{\delta'}(y)}[\omega_{\delta'}(y)u(y)]\varphi_2(y)[1+u(y)]^{k-1}\,dy$$
$$\leq \lambda\gamma_2 r\|\varphi_2\|_0(1+r)^{k-1}.$$

On obtiendrait

$$\frac{r}{\lambda} \leq \gamma_2(\beta + M'(r)). \tag{5.2}$$

Le nombre r étant fixé, si $\lambda \to 0$ le membre gauche de (5.2) tend vers $+\infty$, tandis que le membre de droite est borné.

2) Supposons (F'_3) vérifiée; alors

$$\int G(x,y)\omega_{\delta'}(x)u(y)f_t(y,u(y),\lambda)\,dy \leq \int G(x,y)\omega_{\delta'}(x)\psi_2(y,\lambda)u(y)^k\,dy,$$

d'où

$$r \leq \lambda\beta\gamma_2 + r^k\gamma_2 c. \tag{5.3}$$

On choisit r assez petit pour que

$$c\gamma_2 r^k < \frac{r}{2}.$$

Le nombre r étant fixé ainsi, (5.3) s'écrit

$$\frac{r}{\lambda} \leq c. \tag{5.4}$$

L'inégalité (5.4) est également impossible, lorsque $\lambda \to 0$. Donc on a prouvé (i)*.

Maintenant λ est fixé dans $]0,\lambda_0[$, et r est fixé vérifiant (i)*. Soit v comme dans la proposition 4.2. Démontrons

(ii)* Il existe $R > r$, $\tau_0 > 0$ tels que
  (a) $u \neq \Phi_\lambda(u+\tau v)$ dans K, pour $\tau \geq \tau_0$,
  (b) $u \neq \Phi_\lambda(u+\tau v)$ dans K, pour $0 \leq \tau \leq \tau_0$, $\|u\| = R$.

DÉMONSTRATION DE (a). D'après la proposition 4.2, les solutions de $u = \Phi_\lambda(u+\tau v)$ dans K sont dans $C^0_{\omega_\delta}$. Montrons

LEMME 5.1. *L'équation $u = \Phi_\lambda(u+\tau v)$ n'a pas de solution positive dans $C^0_{\omega_\delta}$ pour τ assez grand.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire, il existe une solution positive de $u = \Phi_\lambda(u+\tau v)$ dans $C^0_{\omega_\delta}$ pour τ grand. On aurait alors

$$u(x) = \int G(x,y)f(y,u(y)+\tau v(y),\lambda)\,dy$$
$$\geq \int G(x,y)[\lambda h(y) + \varphi_1(y,\lambda)u(y)\tau^{k-1}v(y)^{k-1}]\,dy,$$

d'où pour une solution

$$u = \Phi_\lambda(u + \tau v) \geq \lambda \underline{G}h + \tau^{k-1}\underline{G}(u\varphi_1 v^{k-1}).$$

Posons $\rho = \varphi_1 v^{k-1}$; alors $\rho \in C^0_{\omega_\gamma}$, avec

$$\gamma = \begin{cases} \mu + (\delta - \mu)(k-1) & \text{si } (\mathrm{F}_3) \text{ est vérifiée,} \\ \mu + (\delta - \mu)(k-1)/k & \text{si } (\mathrm{F}'_3) \text{ est vérifiée.} \end{cases}$$

Notons $\underline{G}_\rho$ l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{ccccccc} u & \longmapsto & \rho u & \overset{\underline{G}}{\longmapsto} & \underline{G}(\rho u) & \overset{i}{\longmapsto} & \underline{G}(\rho u), \\ C^0_{\omega_\delta} & \longrightarrow & C^0_{\omega_{\gamma+\delta}} & \longrightarrow & C^1_{\omega_{\gamma+\delta}} & \longrightarrow & C^0_{\omega_\delta}. \end{array}$$

$\underline{G}_\rho$ est un opérateur linéaire positif compact de $C^0_{\omega_\delta}$ dans lui-même si $\gamma + \delta < a$, soit $\delta k + \mu(k-2) < a$ si (F_3) est vérifiée et $\delta(1 - 1/k) + \mu/k < a$ si (F'_3) est vérifiée, ce qui est vrai par hypothèse. Soient $\widetilde{K}$ le cône des fonctions positives de $C^0_{\omega_\delta}$ et $(\widetilde{K})^*$ le cône dual de $\widetilde{K}$ dans $(C^0_{\omega_\delta})^*$, dual de $C^0_{\omega_\delta}$:

$$(\widetilde{K})^* = \{w \in (C^0_{\omega_\delta})^* : (w, z) \geq 0, \forall z \in \widetilde{K}\}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne la dualité entre $C^0_{\omega_\delta}$ et $(C^0_{\omega_\delta})^*$.

LEMME 5.2. *Il existe $e_1 \in (\widetilde{K})^*$ et $\lambda_1 > 0$ tels que*

$$\underline{G}^*_\rho e_1 = \frac{1}{\lambda_1} e_1.$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 6.2 de Kreĭn et Rutman [8], il suffit de montrer qu'il existe $u \in C^0_{\omega_\delta}$, $u \geq 0$, $\|u\|_{0,\delta} = 1$ et $d > 0$ tels que

$$\underline{G}_\rho u(x) \geq d u(x). \tag{5.5}$$

On choisit u à support compact; si $x \notin \operatorname{supp} u$, l'inégalité (5.5) est triviale. Si $x \in \operatorname{supp} u$, soient

$$c_1 = \inf_x \int G(x,y)\rho(y)u(y)\,dy, \qquad c_2 = \sup_x u(x).$$

Alors

$$u(x) \leq c_2 = \frac{c_2}{c_1} c_1 \leq \frac{c_2}{c_1} \int G(x,y)\rho(y)u(y)\,dy = \frac{c_2}{c_1} \underline{G}_\rho u(x),$$

d'où (5.5) avec $d = c_2/c_1$.

Revenons à la démonstration du lemme 5.1. Prenons

$$\tau_0 > \lambda_1^{1/(k-1)}.$$

Alors pour $\tau \geq \tau_0$, on aurait

$$\begin{aligned}(u, e_1) = (\Phi_\lambda(u + \tau v), e_1) &\geq \lambda(\underline{G}h, e_1) + \tau^{k-1}(\underline{G}_\rho u, e_1) \\ &= \lambda(\underline{G}h, e_1) + \frac{\tau^{k-1}}{\lambda_1}(u, e_1),\end{aligned}$$

soit

$$(5.6) \qquad (u, e_1)(1 - \tau^{k-1}/\lambda_1) \geq \lambda(\underline{G}h, e_1).$$

D'après (F_1) et la définition 2.1, $\underline{G}h$ est dans l'intérieur de $\widetilde{K}$. Donc $(\underline{G}h, e_1) > 0$. D'autre part, $(u, e_1) \geq 0$ et $1 - \tau^{k-1}/\lambda_1 < 0$. L'inégalité (5.6) est alors impossible, ce qui termine la démonstration du lemme.

COROLLAIRE. *L'équation $u = \Phi_\lambda(u + \tau v)$ n'a pas de solution dans K pour $\tau \geq \tau_0$, ce qui termine la démonstration de* (a).

DÉMONSTRATION DE (b). Soit τ fixé dans $[0, \tau_0]$. D'après la Proposition 5.2, il existe une majoration a priori dans K pour les solutions de $u = \Phi_\lambda(u + \tau v)$, soit $\|u\|_{0,\delta'} \leq N$. On montre que cette estimation est uniforme en τ, en reprenant l'argument de la démonstration du théorème 3.1. Soit $R > N$; alors (b) est vérifiée.

Il en résulte que Φ_λ a deux points fixes $u_1 \neq u_2$ dans K, avec $\|u_1\| < r < \|u_2\| < R$. Par des arguments standard, on montre que ces points fixes sont des solutions de classe C^2 du problème (1.1). D'autre part, d'après la proposition 4.1, ces solutions sont dans $C^0_{\omega_\delta}$.

RÉFÉRENCES

[1] J. CHABROWSKI, *On the existence of G-symmetric entire solutions for semi-linear elliptic equations*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **41** (1992), 413–440.

[2] M. G. CRANDALL AND P. H. RABINOWITZ, *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **58** (1975), 207–218.

[3] D. G. DE FIGUEIREDO, P. L. LIONS AND R. D. NUSSBAUM, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. **61** (1982), 41–63.

[4] B. GIDAS, W. M. NI AND L. NIRENBERG, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$*, Adv. in Math Stud. **A7** (1981), 369–402.

[5] B. GIDAS AND J. SPRUCK, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 525–598.

[6] O. A. I. B. ISSELKOU, *Problèmes semi-linéaires elliptiques dans des domaines bornés et non bornés de $\mathbb{R}^2$*, Thèse, Orléans, 1991.

[7] ———, *On a semi-linear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with an axial symmetry property*, soumis pour publication.

[8] M. G. KREĬN ET M. A. RUTMAN, *Opérateurs linéaires laissant un cône invariant dans un espace de Banach*, Uspekhi Mat. Nauk 3 (1948), no. 1, 3–95 (en russe); trad. anglaise: Transl. Amer. Math. Soc. **10** (1962), 199–325.

[9] C. LI, *Monotonicity and symmetry of solutions of fully nonlinear elliptic equations on unbounded domains*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 585–615.

[10] A. SIMON, *An elliptic problem in $\mathbb{R}^n$ with a small perturbation*, Progress in Partial Differential Equations: the Metz Surveys 2, Pitman Res. Notes Math., vol. 296, Longman, Harlow, 1993, pp. 194–200.

[11] A. SIMON (A. CHALJUB-SIMON) AND P. VOLKMANN, *Existence of ground states with exponential decay for semi-linear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, J. Differential Equations **76** (1988), 374–390.

[12] X. P. ZHU, *A perturbation result on positive entire solutions of a semi-linear elliptic equation*, J. Differential Equations **92** (1991), 163–178.

Manuscript received January 15, 1994

ALICE SIMON
Département de Mathématiques
Université d'Orléans
B.P. 6759, 45067 Orléans Cedex 2, FRANCE

PETER VOLKMANN
Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Postfach 6980, 76128 Karlsruhe, ALLEMAGNE