Topological Methods in Nonlinear Analysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 12, 1998, 193–197

CORRECTION DE "THÉORIE DE LA DUALITÉ ET ORBITES HOMOCLINES DE SYSTÈMES GYROSCOPIQUES"
(TOPOL. METHODS NONLINEAR ANAL. 8 (1996), 95–135)

Mourad Benabas

Dans [1], dualité et orbites homoclines de systèmes j'ai étudié les systèmes d'équations différentielles du type

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_\alpha x(t) = Ax(t) + R'(t, x(t)), \\ x(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{2N}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}_\alpha$ est l'opérateur $\frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha J \frac{d}{dt}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et J la matrice symplectique standard

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}.$$

A est une matrice $2N \times 2N$, R une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$ dans $\mathbb{R}$ et R' est le gradiant de R. On suppose que

$$\text{(H-1)} \qquad A \text{ est symetrique et définie-positive,}$$

$$\text{(H-2)} \qquad \begin{gathered} R \text{ est } T\text{-périodique par rapport à } t \text{ et } R(t, \cdot\,) \text{ est} \\ \text{de classe } C^2, \text{ strictement convexe pour tout } t \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Il existe $q > 2$, k_1, k_2, k_3 et $k_4 > 0$ tels que

$$\text{(H-3)} \qquad R(t, x) \le \frac{1}{q}(R'(t, x), x), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{2N},$$

(H-4) $$k_1|x|^q \leq R(t,x) \leq k_2|x|^q,$$

(H-5) $$k_3|x|^{q-1} \leq |R'(t,x)| \leq k_4|x|^{q-1}.$$

Pour $q > 2$, on notera par p, $p \in]1,2[$, l'exposant conjugué de q défini pas $1/q + 1/p = 1$.

Dans [1], j'ai annoncé le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses* (H-1)–(H-5) *et pour* α *suffisamment petit, le problème* $(\mathcal{P})$ *admet, dans* $W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2,N}) \cap \big(\bigcap_{r\geq p} L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})\big)$*, au moins deux solutions non nulles* x_1 *et* x_2 *distinctes au sens suivant* $x_1(t) \neq x_2(t+kT)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $k \in Z$, $k \neq 0$.

Comme je viens d'être informé par Dr. B. Buffoni (Bath), ce théorème est faux: sous les hypothèses (H-1)–(H-5), le système $(\mathcal{P})$ n'admet pour α petit que la solution zéro. En effet, si x est la solution de $(\mathcal{P})$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} (-\mathcal{A}_\alpha x(t) + Ax(t) + R'(t,x(t)), x(t))\,dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (R'(t,x(t)), x(t))\,dt \geq k_1 q \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^q\,dt. \end{aligned}$$

La première inégalité ci-dessus est dû au fait que l'opérateur $-\mathcal{A}_\alpha + A$ est, pour α petit, défini-positif et que $x \in W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$. La seconde inégalité provient des hypothèses (H-3) et (H-4). Du calcul précédent, on déduit que x est identiquement nul.

L'erreur dans la démonstration du Théorème 1.1 se situe au niveau de la démonstration du Lemme 5.1(b) lorsque j'ai essayé de prouver l'existence d'un y_1 dans L^p tel que $< Ly_1, y_1 >$ soit positif. Ceci est faux puisque l'opérateur $-L$, L étant l'inverse de $D = \mathcal{A}_\alpha - A$, est pour α petit défini positif.

Néanmoins, moyennant certains changements que j'indiquerai ci-dessous, le travail [1] s'applique, au problème

$$(\mathcal{P}') \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_\alpha x(t) = Ax(t) - R'(t,x(t)), \\ x(\pm\infty) = 0. \end{cases}$$

où A et R vérifient les mêmes hypothèses (H-1)–(H-5) de [1]. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 1.1′. *Sous les hypothèses* (H-1)–(H-5) *et pour* α *suffisamment petit, le problème* $(\mathcal{P}')$ *admet, dans* $W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2,N}) \cap \big(\bigcap_{r\geq p} L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})\big)$*, au moins deux solutions non nulles* x_1 *et* x_2 *distinctes au sens suivant* $x_1(t) \neq x_2(t+kT)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $k \in Z$, $k \neq 0$.

La démonstration du Théorème 1.1′ est essentielement la même que celle du Théorème 1.1. Je profite de l'occasion pour indiquer quelques modifications nécessaires ainsi qu'une formulation correcte de la Proposition 2.3.

PROPOSITION 2.3. *Sous l'hypothèse* (H-1), *l'opérateur*

$$D : W^{2,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2,N}) \cap \left(\bigcap_{r \geq p} L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \right) \to L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$$

défini par $Dx = \mathcal{A}_\alpha x - Ax$ *est, pour* α *suffisamment petit, bijectif. Son inverse* L *est linéaire, continu et autoadjoint de* $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ *dans* $L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$.

Pour $y \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$, on pose

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2}(Ly, y) + G(t, y) \right\} dt, \tag{1}$$

fonctionnelle qui diffère de celle de [1] uniquement par le signe devant la partie quadratique dans l'intégrale. La Proposition 3.1 doit être remplacée par,

PROPOSITION 3.1′. *La fonctionnelle* ϕ *est bien définie sur l'espace* $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ *et est de classe* C^1. *De plus,* y *est point critique de* ϕ *dans* $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ *si et seulement si* $x = -Ly$ *est solution de* $(\mathcal{P}')$ *dans* $W^{2,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \cap \left(\bigcap_{r \geq p} L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \right)$.

La démonstration de la Proposition 3.1′ est exactement la même que celle de la Proposition 3.1.

Avec cette nouvelle fonctionnelle, la Proposition 4.5 de [1] n'est pas affectée et ceci sans aucun changement dans les démonstrations.

PROPOSITION 4.5. *Soit* $(y_n) \subset L^p$ *telle que* $\phi(y_n) \to c > 0$ *et* $\phi'(y_n) \to 0$ *dans* L^q. *Alors, on peut en extraire une sous suite* (y_{n_k}) *et il existe* m *points critiques* $y^1, \dots, y^m$ *non nuls ainsi que* m *suites réelles* $(v_k^1), \dots, (v_k^m)$ *telles que* $|v_k^i - v_k^j| \to \infty$ *quand* $k \to \infty$ *et* $i \neq j$ *de tels sorte que*

$$\|y_{n_k} - (\, y^1(\,\cdot\, + v_k^1) + \ldots + y^m(\,\cdot\, + v_k^m)\,)\|_p \to 0$$

quand $k \to \infty$. *De plus,* $\phi(y_{n_k}) \to \sum_{j=1}^m \phi(y^j)$ *et les* v_k^j *peuvent être des multiples de* T.

Le Lemme 5.1 qui est érroné pour la fonctionnelle d'action ϕ de [1] est maintenant vrai pour la nouvelle fonctionnelle (1) associée au problème $(\mathcal{P}')$.

LEMME 5.1′.

(a) *Il existe* $r > 0$, $\delta > 0$ *tels que* $\|y\|_p = r$ *implique* $\phi(y) \geq \delta$. *De plus,* $\phi(0) = 0$ *et* $\phi(y) \geq 0$ *pour* $\|y\|_p \leq r$.

(b) *Il existe* $y_0 \in L^p$ *tel que* $\|y_0\|_p > r$ *et* $\phi(y_0) < 0$.

DÉMONSTRATION. (a) se démontre de la même manière que dans [1]. La preuve du (b) est encore plus simple que celle imaginée dans l'article. Plus précisément, on n'a pas besoin de construire un y_1 dans L^p telle que $\langle Ly_1, y_1 \rangle$ soit négatif. IL suffit de dire que $-L$ étant défini-positif, considérons alors y_1

dans L^p tel que $\langle Ly_1, y_1\rangle$ soit négatif. Puis on considère $y = \lambda y_1$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et on calcul $\phi(y)$. On obtient

$$\begin{aligned}\phi(\lambda y_1) &= \frac{1}{2}\langle L\lambda y_1, \lambda y_1\rangle + \int_{\mathbb{R}} G(t, \lambda y_1(t))\, dt \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2}\|L\|_{p,q}\|y_1\|_p^2 + \frac{\lambda^p}{k_1}\|y_1\|_p^p,\end{aligned}$$

d'après (G-2) de l'article ou (H-4) de la présente note. Comme $p \in]1, 2[$, on voit bien qu'on a (b) du lemme avec $y_0 = \lambda y_1$, λ assez grand dans $\mathbb{R}^+$. □

La suite de la démonstration se déroule de la même manière que dans [1], c'est-à-dire que j'arrive à partir du Lemme 5.1′, à construire une suite $(y_n) \subset L^p$ telle que $\phi(y_n) \to c$ et $\phi'(y_n) \to 0$ où c est une constante strictement positif. Pour la construction d'une telle suite, il est commode d'utiliser le principe variationel d'Ekeland. On applique après la Proposition 4.5 à cette suite et on obtient l'existence d'au moins un point critique donc d'au moins une solution de $(\mathcal{P}')$. La seconde solution s'obtient exactement comme dans l'article sans aucun changement dans les démonstrations.

Lorsque $\alpha = 0$, le problème $(\mathcal{P}')$ devient

$$(\mathcal{P}'') \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) = Ax(t) - R'(t, x(t)), \\ x(\pm\infty) = 0. \end{cases}$$

où cette fois-ci, on peut considérer $x(t) \in \mathbb{R}^s$ avec $s \geq 1$ un entier arbitraire. Le système $(\mathcal{P}'')$ a été étudié par Rabinowitz dans [2]. Sous les mêmes hypothèses que les notres sur A et R mais sans l'hypothèse de convexité de R, Rabinowitz démontre l'existence d'au moins une solution de $(\mathcal{P}'')$. En fait, quand $\alpha = 0$, la démonstration du Théorème 1.1′ reste valable pour tout $s \geq 1$ (pas nécessairement paire), ce qui donne

THÉORÈME 1.2. *Sous les hypothèses* (H-1)–(H-5)*, le problème* $(\mathcal{P}'')$ *admet dans,* $W^{2,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2,N}) \cap \big(\bigcap_{r\geq p} L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})\big)$*, au moins deux solutions non triviales* x_1 *et* x_2 *distinctes au sens suivant* $x_1(t) \neq x_2(t + kT)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $k \in Z$*,* $k \neq 0$*.*

Sans l'hypothèse de convexité, on ne peut pas garantir l'existence de la seconde solution de $(\mathcal{P}'')$ comme on le voit à travers l'exemple de l'équation $\ddot{x}(t) = x(t) - R'(t, x(t))$ où $s = 1$ et $R(t, x) = x^3$. R satisfait les hypothèses du Théorème 1.2 à l'exception de la convexité et on a géométriquement une seule solution de $(\mathcal{P}'')$. Notons qu'en prenant $R(t, x) = x^4$ qui satisfait toutes les hypothèse du Théorème 1.2 (convexité compris), le problème $(\mathcal{P}'')$ admet exactement deux solutions géométriquement distinctes.

RÉFÉRENCES

[1] M. BENABAS, *Théorie de la dualité et orbites homoclines de systèmes gyroscopiques*, Topolog. Meth. in Nonlin. Anal. **8** (1996), 95–135.

[2] P. H. RABINOWITZ, *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **114A** (1990), 33–38.

Manuscript received August 4, 1998

MOURAD BENABAS
53 rue D'Amiens
76000 Rouen, FRANCE

E-mail address: Mourad.Benabas@univ-rouen.fr